நேமவரைவியல்

சி. சௌ. கருப்பன் செட்டி

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ,) வரிசை எண் —818

நேமவரைவியல்

ஆசிரியர்
சி. சௌ. கருப்பன் செட்டி, எம்.எஸ்சி.,
கணித விரிவுரையாளர்,
மண்டலப் பொறியியற் கல்லூரி,
திருச்சிராப்பள்ளி

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition— September, 197[illegible]
Number of Copies—2000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 818

© Government of Tamilnadu

NOMOGRAPHY

C. S. KARUPPAN CHETTY

Price Rs. 12-30

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by:
MEIPPORUL ACHAKAM,
20, Konnur High Road,
Ayanpuram, Madras-600 023.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினெட்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக் கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப் பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப் பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணித வியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளி யியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான நேமவரைவியல் என்னும் இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 818 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 853 நூல்கள் வெளிவந்துள் ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த் தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம்பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களை யும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங் களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளரவேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ்; எங்கும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறை வேற்றவேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக!

செ. அரங்கநாயகம்

நூன்முகம்

இன்றைய உலகம் அறிவியல் உலகம். அறிவியல் வளர்ச்சியாலும் பொறியியல் சாதனையாலும் அன்றாட வாழ்வில் நாம் அடைந்துவரும் நன்மைகள் எண்ணிலடங்கா. ஒவ்வொரு சாதனைக்கும் பின்னால் அடங்கியிருக்கும் உழைப்போ அளப்பரியது. சிந்தனைக்கு வேலை கொடுப்பதோடன்றிச் செய்யவேண்டிய கணக்கீடுகள் (calculations) பலப்பலவாம். காலத்தின் பெரும்பகுதி இக் கணக்கீடுகளில் கழியாமல், விரைவில் விடைகாண எளிய வழிகள் ஏதும் உளவோ என எண்ணினர் அறிஞர் பலர். அவர் தம் திறத்தால் முகிழ்த்த முறைகள் (methods) பல. அவற்றுள் சிலவே மணிச்சட்டம் (abacus), மடக்கைப் பட்டியல்கள் (logarithmic tables) போன்ற எண்சார் வழிகள் (numerial devices), கூட்டும் இயந்திரம் (adding machine), கணக்குப் பொறி (calculator) போன்ற இயந்திரக் கருவிகள் (mechanical devices), புதுமைக் கணிப்பொறி (modern computer) போன்ற மின்னணுக் கருவிகள் (electronic devices), நழுவு கணிப்பான் (slide rule), நேமவரைவு (nomograph) போன்ற வரைபட வழிகள் (graphical devices). இறுதியில் சொல்லப்பட்ட நேமவரைவைப் பற்றி விளக்க மலர்ந்ததே இந்நூல்.

நேமவரைவுக்கு 'Nomograph' என்று ஆங்கிலத்தில் பெயர். இவ்வாங்கிலச் சொல்லானது நேமம் அல்லது விதி (law) என்னும் பொருளை உணர்த்தும் 'nomos', வரை அல்லது எழுது என்னும் பொருளை உணர்த்தும்'graphos' என்ற இரு கிரேக்கச் சொற்களிலிருந்து பிறந்ததாகும். இதிலிருந்து, வாய்பாடுகளின் (formulae) அமைப்பில் உள்ள கணித விதிகளை வரைபட வாயிலாகத் தெரிவிப்பதுதான் நேமவரைவு என்பது நன்கு விளங்கும். நேமவரைவை நேமவரையம் (Nomogram) எனவும் சொல்லலாம்.

நேமவரைவைப் பற்றி விளக்கும் நேமவரைவியல் (Nomography), பல நூற்றாண்டுகளாகப் பயின்றுவரும் தளவடிவியலின் (Plane Geometry) எளிய கோட்பாடுகளின் (principles) அடிப்படையில் எழுந்தது. நேமவரைவியல் வளர்ச்சியின் பெரும்பங்கு, பாரிசில் (Paris) உள்ள எக்கோல் பல்தொழில் நுணுக்கக்கூடத்தைச் (Ecole Polytechnic) சார்ந்த மாரிசு-டி-ஒகேன் (Maurice-d'Ocagne, 1862-1938) என்பவரைச் சாரும் என்பதை மறக்கவோ, மறுக்கவோ, மறைக்கவோ முடியாது. ஆய்வுக் கட்டுரைகள் பலவற்றாலும அரிய நூல்கள் சிலவற்றாலும் இவர் இவ் வியலை வளர்த்துள்ளார். குறிப்பாக 1899ஆம் ஆண்டில், 'Traite 'de Nomographie' என்னும் தலைப்பில் இவர் வெளியிட்ட ஆய்வுக் கட்டுரையானது நேமவரைவியலின் பொதுக் கொள்கைகளையும் (general theories), அவற்றைச் செயல்முறையில் பயன்

படுத்தும் விதங்களையும் கூறுகின்றது. அமெரிக்காவைச் சேர்ந்த லிப்கா (Lipka) போன்ற அறிஞர்கள் இப்பாடத்தைப் பலருக்கும் புரியக்கூடிய வகையில் இந் நூற்றாண்டின் தொடக்கத்தில் படைத்துத் தந்தனர்.

நேமவரைவியல் பற்றிய பாடநூல்களில் சில, கணிதம் அறிந்தவர்களின் ஆர்வத்தைத் தூண்டும் வண்ணம் அணிக்கோவை முறையில் (Determinant method) எழுதப்பட்டிருக்கலாம். சில, பொறியாளர்களின் சிந்தனைக்கேற்ப வடிவியல் (Geometry) முறையில் எழுதப்பட்டிருக்கலாம். சில, நேமவரைவியலின் அடிப்படைக் கொள்கைகளை மட்டும் அறிவுறுத்தலாம். சில, அமைப்பு முறைகளை (constructions) மட்டும் விளக்கலாம்.

நேமவரைவியலின் செயல்முறை அறிவு, பொறியாளர்களுக்கு மட்டுமன்றி இயற்பியல் (Physics), வேதியியல் (Chemistry) வல்லுநர்களுக்கும், மருத்துவர்களுக்கும், அறிவியல் மற்றும் தொழில்துறை ஆய்வாளர்களுக்கும் பயன் நல்கக்கூடியது. உந்து (car) ஓட்டவல்ல பலர் அதனுள் இருக்கும் பொறிகளின் (engines) இயந்திர நுணுக்கத்தை (mechanism) அறியாதது போல, நேமவரையங்களைப் பயன்படுத்தும் பல அறிவியலாரும் பொறியாளர்களும், அவற்றின் அமைப்பு முறையில் பொதிந்து கிடக்கும் அடிப்படைக் கொள்கைகளை அறியாதவராய் உள்ளனர். இக்கொள்கைகளைக் கூறும் கணிதமோ மிகவும் எளிமையானது. தேவையான இக்கொள்கைகளையும், பல்வேறு வகையான நேமவரையங்களை அமைக்கும் முறைகளையும் எடுத்துரைப்பதே இந் நூலின் குறிக்கோள் ஆகும். அணிக்கோவையைப் (determinant) பற்றி அவ்வளவாகத் தெரியாது எனப் பலர் நினைக்கக்கூடும் என்பதால் எல்லோருக்கும் பழக்கப்பட்ட வடிவியல்வாயிலாகவே நிறுவல்கள் (proofs) தரப்பட்டுள்ளன. இருப்பினும், ஆர்வமுள்ளவர் அறிந்துகொள்ளட்டும் என்பதற்காக 'அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையங்கள்' என்றோர் அதிகாரம் இந்நூலின் இறுதியில் எழுதப்பட்டுள்ளது.

இந் நூலில் உள்ள கணக்குகள் யாவும், அறிவியல், பொறியியல் இவற்றின் பல்வேறு துறைகளினின்றும் திரட்டப்பட்டனவாகும். நேமவரைவியலைப் புதிதாகப் படிக்க விழைபவர்கள் எளிதில் புரிந்து கொள்ளட்டும் என்பதற்காக எடுத்துக்காட்டுகள் (examples) விரிவாகவும் தெளிவாகவும் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

நூல் ஆசிரியன்

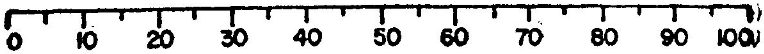
பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	அளவுகோல்கள்	...	1
2.	நேமவரையம்	...	87
3.	இணையளவுகோல் நேமவரையங்கள்	...	99
4.	Z-விளக்கப் படங்கள்	...	168
5.	இணைக் குறியிணைப்புக் கோடுகளும் செங்குத்துக் குறியிணைப்புக் கோடுகளும்	...	215
6.	ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அளவுகோல்கள்	...	239
7.	மீண்டும் வரும் மாறிகள்	...	256
8.	ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட நேமவரையங்கள்	...	332
9.	வட்ட நேமவரையங்கள்	...	357
10.	அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையங்கள்	...	377
	கலைச் சொற்கள்	...	432

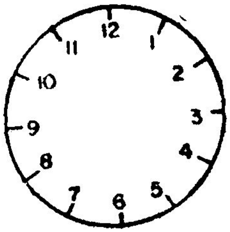
1. அளவுகோல்கள்

(Scales)

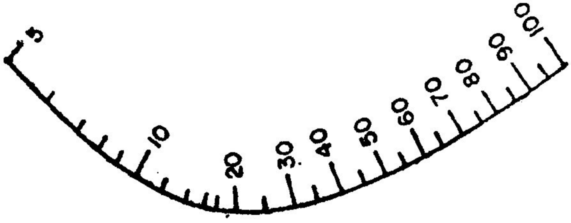
வரைபட மொழியின் அகரம் அளவுகோல் ஆகும். வரைபட முறையின் (graphical method) கணக்குகள் யாவும் நேராகவோ மறைமுகமாகவோ அளவுகோல்களை அடிப்படையாகக் கொண்டன. அளவுகோல்களின் இயல்பு (nature), பொதுப் பண்புகள் (properties) ஆகியவற்றைப் பற்றிய தெளிவான கருத்துகளை, எடுத்த எடுப்பிலேயே மனத்திற் கொள்ள வேண்டும் என்பதைத்தான் இவ்வுண்மை சொல்லுகிறது. நேரத்



படம் 1



படம் 2



படம் 3

தைக் (time) கணக்கிடவோ, ஓர் அறையின் நீள அகல உயரங்களைக் காணவோ, உந்தின் வேகத்தைத் (speed) தெரிந்து கொள்ளவோ அல்லது ஓரிடத்தின் வெப்ப நிலையை (temperature)

அறிந்து கொள்ளவோ, ஏதோ ஒருவகை அளவுகோலைப் பயன் படுத்துவதால் இந் நூலைப் படிப்பவர் யாவரும் அளவுகோல்களைப் பற்றி ஓரளவு அறிந்திருக்கக்கூடும்.

1. பல்வேறு அளவுகோல்கள்

அளவுகோலின் வரையறை (definition) என்ன? அளவுகோல் என்பது குறிகளின் (marks) தொகுதியைக் (set) கொண்ட ஒரு நேர் கோடு (straight line) அல்லது வளைகோடு (curve) ஆகும். இக் கோட்டுக்குத் தண்டு (stem) எனப் பெயர். படங்கள் *1, 2, 3,* இவற்றில் ஒவ்வொன்றும் ஓர் அளவுகோல் ஆகும்.

அடிக்கோல் (foot rule), வெப்ப அளவி (thermometer), கோண அளவி (protractor), கடிகாரத்தின் முகப்பு (dial) முதலியன அளவுகோல்களின் எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும். அளவுகோலின் மீதுள்ள குறிகள் புள்ளிகளாகவோ (points) அல்லது கீறுகளா கவோ (strokes) இருக்கும். இக் குறிகளுக்கு அளவுக் குறியீடுகள் (graduations) எனப் பெயர். இக் குறிகள் சிலவற்றை ஒட்டி எண்கள் எழுதப்பட்டிருக்கும். இவ் வெண்களுக்கு அளவீடுகள் (calibrations) எனப் பெயர். இந்த அளவீடுகள் தண்டு நெடுகிலும் கூடிக்கொண்டோ அல்லது குறைந்துகொண்டோ செல்லும். மேலும், இவை படிப்பதற்கு எளிமையான மதிப்புகளைக் (values) கொண்டிருக்கும்.

ஓர் அளவுகோலில் *0, 1,* ∞ என்னும் அளவீடுகளுக்குரிய அளவுக் குறியீடுகளை முறையே சுழிக்குறி (zero mark), ஒன்றுக் குறி (one mark), முடிவிலிக்குறி (infinity mark) என்றும், முதன் முதலில் உள்ள அளவுக் குறியீட்டை முதற்குறி (first mark) என்றும் கூறுவது பொருத்தமாகும்.

ஓர் அளவுகோலின் அளவீடுகள் ஒரு முனையில் (end) 5 முதல் மறுமுனையில் *100* முடியச் சென்றால் (படம் *3*) இவ்விரண்டு எண் களுக்கும் இடையில் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணுக்குமென அளவு கோலின்மீது பெரும்பாலும் ஒரு புள்ளி இருக்கும். அந்தப் புள்ளி யானது அளவுகோலின்மீதுள்ள ஓர் அளவுக் குறியீட்டுக்கோ அல்லது ஓர் அளவீட்டுக்கோ உரியதாக இருக்கவேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக, படம் 3இல் உள்ள அளவு கோலின்மீது *73* என்னும் அளவீடோ, இந்த எண்ணுக்குரிய அளவுக்குறியீடோ கிடையாது. இருப்பினும், 73க்கென ஒரு புள்ளி இந்த அளவுகோலின்மீது உள்ளது. இவ்வாறு ஒவ்வோர் எண் ணுக்கும் ஒரு புள்ளி உண்டு என்பதுபோல, இந்த அளவுகோலின்

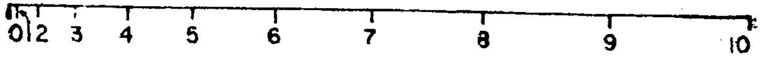
மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்குமென 5க்கும் 100க்கும் இடையில் உள்ள ஓர் எண் இருக்கும்.

சீர் அளவுகோலும் சீரிலா அளவுகோலும் (Uniform Scale and Non-uniform Scale) : ஓர் அளவுகோலில் ஏதேனும் இரண்டு அளவீடுகளுக்கு இடையே உள்ள தூரமானது (distance), அதே வேறுபாட்டைக் (difference) கொண்ட வேறு எந்த இரண்டு அளவீடுகளுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்திற்குச் சமமாயிருப்பின், அந்த அளவுகோலுக்குச் சீர் அளவுகோல் (uniform scale) எனப் பெயர். அளவீடுகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் என்றால், அந்த அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் என்பதை அறிக. சீர் அளவுகோலை ஒருபடி அளவுகோல் (linear scale) எனவும் கூறலாம். படம் 1-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது ஒரு சீர் அளவுகோல் ஆகும். இதில் சுழிக்குறியிலிருந்து (zero mark) மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்கள், அந்த அளவீடுகளுக்கு விகிதசமமாக (proportional) உள்ளன. சீர் அளவு கோலுக்கு அடிக்கோல் எடுத்துக்காட்டாகும்.

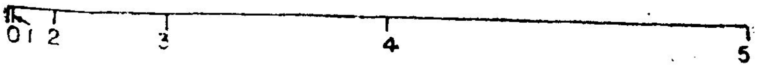
ஓர் அளவுகோலில் ஏதேனும் இரண்டு அளவீடுகளுக்கு இடையே உள்ள தூரமானது, அதே வேறுபாட்டைக் கொண்ட வேறு எந்த இரண்டு அளவீடுகளுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்திற்குச் சமமின்றி யிருப்பின், அந்த அளவுகோலுக்குச் சீரிலா அளவுகோல் (non-uniform scale) எனப் பெயர். வானொலிப் பெட்டியின் முகப்பில் உள்ள அலைவெண்ணைக் (frequency) காட்டும் அளவுகோலானது ஒரு சீரிலா அளவுகோல் என்பதைக் காணலாம்.

பொதுவான அளவுகோல்கள் : இருபடி அளவுகோல் (square scale), முப்படி அளவுகோல் (cubic scale), இருபடி மூல அளவு கோல் (square root scale), தலைகீழ் அளவுகோல் (reciprocal scale), மடக்கை அளவுகோல் (logarithmic scale) ஆகிய இவை யாவும் சீரிலா அளவுகோல்கள் ஆகும். சுழிக்குறியிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்கள், அந்த அளவீடுகளின் இருபடி களுக்கு (squares) விகிதசமமாகஇருப்பின், அஃது ஓர் இருபடி அளவுகோல் ஆகும் (படம் 4). அளவீடுகளின் முப்படி களுக்கு (cubes) விகித சமமாக இருப்பின், அந்த அளவுகோல் ஒரு முப்படி அளவுகோல் ஆகும் (படம் 5). படம் 6, ஓர் இருபடி மூல அளவுகோலைக் காட்டுகிறது. இதில் சுழிக்

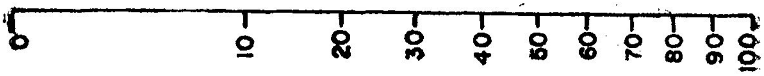
குறியிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்கள் அந்த அளவீடு களின் இருபடி மூலங்களுக்கு (square roots) விகிதசமமாக இருக்கும்.



படம் 4

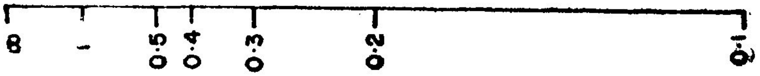


படம் 5



படம் 6

படம் 7-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது ஒரு தலைகீழ் அளவுகோல் ஆகும். இதில் அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்கள், அந்த அளவீடுகளின் தலைகீழ்களுக்கு (reciprocals) விகிதசமமாக உள்ளன. முடிவிலியின் (infinity) தலைகீழ் சுழி (zero) ஆகும். எனவே, அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து முடிவிலிக்குறிக்குள்ள (infinity mark) தூரமானது, சுழிக்கு

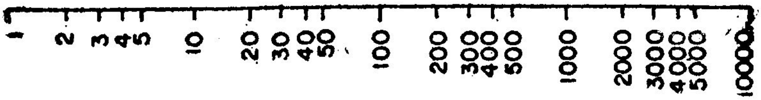


படம் 7

விகிதசமமாக இருக்கவேண்டும். அளவுகோலின் தொடக்கத்தில் முடிவிலிக்குறி இருக்கவேண்டும் என்பதுதான் இதன் உட்பொருள். எனவேதான், தலைகீழ் அளவுகோலின் தொடக்கத்தில் முடிவிலிக் குறி உள்ளது. சுழியின் தலைகீழ் முடிவிலி ஆகும். எனவே, தலைகீழ் அளவுகோலில் சுழிக்குறியானது அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து முடிவில்லாத தூரத்தில் அமையும். இதிலிருந்து சுழிக்குறியைத் தலைகீழ் அளவுகோலில் குறிக்க இயலாது என்பது தெளிவாகும்.

மடக்கை அளவுகோல் (Logarithmic Scale): படம் 8-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது ஒரு மடக்கை அளவுகோல் ஆகும். இதில் அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து மற்ற அளவீடு களுக்குள்ள தூரங்கள், அந்த அளவீடுகளின் பொது

மடக்கைகளுக்கு (common logarithms), அதாவது 10-ஐ அடியாகக் (base) கொண்ட மடக்கைகளுக்கு விகிதசமமாக உள்ளன. இந் நூலில் எதுவும் குறிப்பிடாமல் மடக்கை என வரின்



படம் 8

அது பொது மடக்கையையே குறிக்கும். 1இன் மடக்கை சுழி யாகும். எனவே, அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து ஒன்றுக் குறிக்குள்ள (one mark) தூரமானது, சுழிக்கு விகிதசமமாக இருக்க வேண்டும். அளவுகோலின் தொடக்கத்தில் ஒன்றுக்குறி இருக்க வேண்டும் என்பதுதான் இதன் உட்பொருள். எனவேதான், மடக்கை அளவுகோலின் தொடக்கத்தில் ஒன்றுக்குறி உள்ளது.

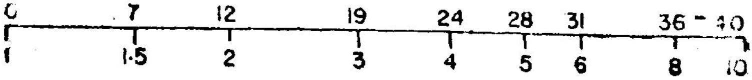
ஒரு மடக்கை அளவுகோலில், 1க்கும் 10க்கும், 5க்கும் 50க்கும், 30க்கும் 300க்கும், பொதுவாக kக்கும் 10kக்கும் இடையே உள்ள தூரங்கள் யாவும் சமமாக இருக்கும். மேலும், ஒரு மடக்கை அளவுகோலில் $k(10)^n$க்கும் $k(10)^{n+1}$க்கும் இடைப் பட்ட அளவுகோலானது, kக்கும் 10kக்கும் இடைப்பட்ட அளவு கோலின் மறுபகர்ப்பு (repetition) ஆகும். படம் 8ஐக் காண்க. இப் படிப்பட்ட ஒவ்வொரு மறுபகர்ப்புக்கும் மடக்கை அளவுகோலின் ஒரு சுற்று (cycle) எனப் பெயர். எனவே, ஒரு சுற்றுக்குரிய மடக்கை அளவுகோல் கிடைப்பின், கொடுக்கப்பட்ட எந்த இடைவெளிக்கும் (interval) மடக்கை அளவுகோலை அமைத்து விடலாம்.

கவிதை முறையில் மடக்கை அளவுகோல்: மடக்கைப் பட்டியல் களோ அல்லது மடக்கை அளவுகோலோ கிடைக்கவில்லையெனில், கீழ்க்கண்ட கவிதை முறையில் மடக்கை அளவுகோலை ஒரு சுற் றுக்கு அமைக்கலாம்.

கணக்குதனைக் கண்ணென்று கருத்திற் கொள்க—போற்றிக்
கற்றிடுக உலகளவுப் புகழை வெல்க.

என்னும் கவிதை வரிகளில் 41 தமிழ் எழுத்துகள் உள்ளன. ஒவ்வோர் எழுத்துக்கும் ஒரு புள்ளி வீதம் 41 புள்ளிகளை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது சம இடைவெளியில் (equal interval) இருக்கு மாறு குறிக்கவேண்டும். சீர் அளவுகோல் ஒன்று கிடைப்பின் புள்ளிகளைக் குறிக்க மிக்க வசதியாக இருக்கும். இவ்வாறு குறித்து

புள்ளிகளில் முதற்புள்ளி கவிதையின் முதலெழுத்துக்கென்றும், இரண்டாம் புள்ளி இரண்டாம் எழுத்துக்கென்றும், இப்படியாக இறுதிப் புள்ளி இறுதி எழுத்துக்கென்றும் கொள்ளவேண்டும். பிறகு, க என்னும் எழுத்துக்குரிய புள்ளிகள் எல்லாவற்றிற்கும் நேரே கீறிட்டு (stroke), முறையே *1, 1.5, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10* என்ற அளவீடுகளை எழுதவேண்டும். இப்பொழுது கிடைப்பது ஏறத்தாழச் சரியாயிருக்கும் ஒரு மடக்கை அளவுகோல் ஆகும்.



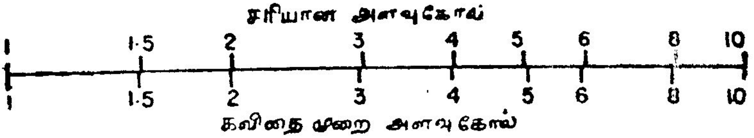
படம் 9

படம் 9 கவிதை முறையில் அமைக்கப்பட்ட மடக்கை அளவுகோல் ஆகும். முதற்புள்ளியிலிருந்து 'க' என்னும் எழுத்துக்குரிய புள்ளிகளின் தூரங்களை அளந்தால், அவை முறையே *0, 7, 12, 19, 24, 28, 31, 36, 40* இவற்றிற்கு விகிதசமமாக இருப்பதைக் காணலாம். மடக்கைப் பட்டியல்களிலிருந்து,

$$\log 1 = 0$$
$$\log 1.5 = 0.1761$$
$$\log 2 = 0.3010$$
$$\log 3 = 0.4771$$
$$\log 4 = 0.6021$$
$$\log 5 = 0.6990$$
$$\log 6 = 0.7782$$
$$\log 8 = 0.9031$$
$$\log 10 = 1.0000$$

எனக் காணலாம். $\log k$ என்பது, kஇன் பொதுமடக்கை எனப் பொருள்படும். மேலே உள்ள மடக்கைகள் முறையே *0, 7.044, 12.040, 19.084, 24.084, 27.960, 31.128, 36.124, 40* என்னும் எண்களுக்கு விகிதசமமாக உள்ளன. இந்த எண்கள் முறையே *0, 7, 12, 19, 24, 28, 31, 36, 40* என்னும் எண்களுக்கு ஏறத்தாழச் சமமாக உள்ளன. இந்த முழு எண்களே (integers) கவிதை முறை அளவுகோலின் (படம் 9) மேற்பகுதியில் காணப்படுவன. இதிலிருந்து கவிதை முறையில் அமைத்த அளவுகோலில், ஒன்றுக்குறியிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்கள், அந்த அளவீடுகளின் மடக்கைகளுக்கு ஏறத்தாழ்

விகிதசமமாக உள்ளன என்பது தெரிகிறது. எனவே, மேற்கூறிய முறையில் அமைக்கப்பட்டது ஏறத்தாழச் சரியாயிருக்கும் ஒரு மடக்கை அளவுகோல் என்பது தெளிவாகும்.



படம் 10

கவிதை முறையில் அமைக்கப்பட்ட அளவுகோலும் சரியான மடக்கை அளவுகோலும் படம் *10* இல் ஒப்பீட்டிற்காகக் (comparison) காட்டப்பட்டுள்ளன.

2. சார்பு அளவுகோல்கள் (Functional Scales)

ஓர் அளவுகோலின் அளவீடுகளுக்கும், அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து அந்த அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களுக்கும் உள்ள தொடர்பினைத் தெரிந்துகொள்ளவேண்டும். அளவுகோலின் ஓர் அளவீட்டை u என்றும், அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து அந்த அளவீட்டுக்குள்ள தூரத்தை x என்றும் கொண்டு, முன்னர் சொல்லப்பட்ட அளவுகோல்களை ஒப்பு நோக்குக. xஆனது, சீர் அளவுகோலில் uக்கு விகிதசமமாகவும், இருபடி அளவுகோலில் u^2க்கு விகிதசமமாகவும், முப்படி அளவுகோலில் u^3க்கு விகிதசமமாகவும், இருபடி மூல அளவுகோலில் $\sqrt{u}$க்கு விகிதசமமாகவும், தலைகீழ் அளவுகோலில் $\left(\frac{1}{u}\right)$ க்கு விகிதசமமாகவும், மடக்கை அளவுகோலில் $(\log u)$க்கு விகிதசமமாகவும் இருப்பதைக் காணலாம். ஆக ஒவ்வோர் அளவுகோலிலும், xஆனது uஇன் ஒரு சார்புக்கு (function) விகிதசமமாக உள்ளது. இதை, xஆனது uஇன் ஒரு சார்பாக உள்ளது என்றும் கூறலாம். ஆனால் ஒவ்வொருவகை (type) அளவுகோலுக்கும் அச் சார்பு வெவ்வேறாக உள்ளது.

மேற்சொன்ன அளவுகோல்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு சமன்பாட்டின் (equation) அமைப்பில் (form) தெரிவிக்கலாம்.

அளவுகோல்	சமன்பாடு
சீர்	$x = f_1(u) = u$
இருபடி	$x = f_2(u) = u^2$
முப்படி	$x = f_3(u) = u^3$
இருபடிமூலம்	$x = f_4(u) = \sqrt{u}$
தலைகீழ்	$x = f_5(u) = \left(\frac{1}{u}\right)$
மடக்கை	$x = f_6(u) = \log u$

குறிப்பு : uஇன் சார்பு என்பது, u என்னும் மாறியைச் (variable) சார்ந்த ஒரு கோவை (expression) ஆகும். u^3+2u-1, $\cos u$, $\log (u+2)$, e^u போன்றவை uஇன் சார்புக்கு எடுத்துக் காட்டுகளாகும். uஇன் சார்பை $f(u)$ எனக் குறிப்பது மரபு. வெவ்வேறு சார்புகள் வரும்பொழுது $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$, …… என வெவ்வேறு கீழ்க்குறிகளையோ (suffixes) அல்லது $g(u)$, $\emptyset(u)$, $F(u)$ … என வெவ்வேறு எழுத்துகளையோ பயன்படுத்திக்கொள்ளலாம்.

அளவுகோல் குணகமும் அளவுகோல் சமன்பாடும் (Scale Modulus and Scale Equation) : மேற்சொன்ன சமன்பாடுகள் யாவும், அவற்றிற்குரிய அளவுகோல்களின் பொதுவான அமைப்பைத்தான் தெரிவிக்கின்றன. இந்தச் சமன்பாடுகள் அளவுகோல்களைச் சரிநுட்பமாகத் தெரிவிக்கின்றனவா என்பது ஆராயவேண்டிய ஒன்று. இதற்கு முடிவு காண ஓர் எளிய சோதனை செய்து பார்க்கலாம். படம் 1-ல் காட்டப்பட்டுள்ள அளவுகோலில் 0 என்ற அளவீட்டுக்கும் 100 என்ற அளவீட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை அளந்துபார்த்தால், அது 10 சென்டிமீட்டர் (centimetre) எனத் தெரிகிறது. uஐச் செ. மீட்டரில் குறித்தால்,

$$x = u$$

என்னும் சமன்பாடு இந்த அளவுகோலுக்குப் பொருந்தாது என்பது தெளிவு. இருப்பினும், இந்த அளவுகோலுக்குப் பொருந்துமாறு, சீரமைப்புக் கூறு (adjusting factor) ஒன்றை இடைச் செருகி, சமன்பாட்டை மாற்றி அமைக்கலாம். 100 பிரிவுகளை (divisions) 10 செ.மீ. தூரத்திற்குத் தக்கவாறு சீராக அமைக்கவேண்டுமெனில், ஒவ்வொரு பிரிவும் 10/100 அதாவது, 0.1 செ.மீ. நீளத்தில் இருக்கவேண்டும். 0.1 என்னும் இந்த எண்ணைச் சமன்பாட்டில் இடைச்செருகி,

$$x = 0.1\,u$$

என எழுதினால், இச் சமன்பாடு படம் 1-ல் உள்ள அளவுகோலைச் சரிநுட்பமாகத் தெரிவிக்கும். 0.1 என்னும் இச் சீரமைப்புக் கூற்றுக்கு இந்த அளவுகோலின் அளவுகோல் குணகம் (scale modulus) எனப் பெயர். அளவுகோல் குணகத்தை m என்னும் எழுத்தால் குறித்துக்கொள்ளலாம். நிலப்படத்தின் அளவுத் திட்டம், அமைப்பு மாற்றக் கூறு (mapping factor) போன்றவை அளவுகோல் குணகத்தின் பொருளையே உணர்த்துகின்றன.

படம் 5-ல் காட்டியுள்ள முப்படி அளவுகோலில் 0 என்னும் அளவீட்டுக்கும் 5 என்னும் அளவீட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை அளந்தால், அது 10 செ.மீ. என்பது தெரியும். இதன் பொருள் யாதெனில், 5^3, அதாவது 125 அலகுகள் (units) 10 செ.மீ. நீளத்திற்குத் தக்கவாறு பிரிக்கப்பட்டுள்ளன என்பதாகும். எனவே, இந்த அளவுகோலின் அளவுகோல் குணகம் 10/125 அதாவது 0.08 ஆகிறது. எனவே, தூரத்தைச் செ.மீட்டரில் அளக்கும்பொழுது படம் 5-ல் காட்டியுள்ள முப்படி அளவுகோலுக்கு

$$x = 0.08\,u^3$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இவ்வாறாக, மேலே சொல்லப்பட்ட எல்லா அளவுகோல்களின் சமன்பாடுகளுக்கும்

$$x = m\,f(u)$$

என்னும் பொதுவான அமைப்பு கிடைக்கிறது. இந்தப் பொதுவான அமைப்புக்கு அளவுகோல் சமன்பாடு (scale equation) எனப் பெயர். இதில் m என்பது அளவுகோல் குணகத்தையும் x என்பது அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து u என்னும் அளவீட்டுக்குள்ள தூரத்தையும் குறிக்கின்றன. இப்படிப்பட்ட சமன்பாட்டால் தெரிவிக்கப்படும் அளவுகோலுக்குச் சார்பு அளவுகோல் (functional scale) எனப் பெயர்.

$$x = m\,f(u)$$

என்னும் சமன்பாட்டையுடைய அளவுகோலில் A, B என்னும் இரு புள்ளிகளுக்குரிய அளவீடுகளை முறையே u_1, u_2 எனக்கொள்க. அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து இப் புள்ளிகளின் தூரங்கள் முறையே x_1, x_2 எனில்,

$$x_1 = m\,f(u_1)$$

$$x_2 = m\,f(u_2)$$

என்ற தொடர்புகள் கிடைக்கும். $x_2 > x_1$ எனில்,

$$x_2 - x_1 = m\,f(u_2) - m\,f(u_1)$$

அதாவது, $$AB = m\,[f(u_2) - f(u_1)]$$

எனவே, $$m = \frac{AB}{[f(u_2) - f(u_1)]}$$

$$x < x_1 \text{ எனில்}, \quad m = \frac{AB}{[f(u_1) - f(u_2)]}$$

மேற்கூறிய இரண்டிலிருந்தும்

$$m = \frac{AB}{[f(u_1) \backsim f(u_2)]}$$

என அறியலாம். $[f(u_1) \backsim f(u_2)]$ என்பது $f(u_1)$, $f(u_2)$ என்ற இரண்டுக்கும் உள்ள வேறுபாடு ஆகும். இஃது எப்பொழுதும் ஒரு மிகை எண்ணாகவே (positive number) இருக்கும். u_1, u_2 என்பன அளவுகோலின் இரு முனைகளிலும் உள்ள அளவீடுகள் எனில், AB என்னும் நீளம் அளவுகோல் நீளம் (scale length) ஆகிறது. $[f(u_1) \backsim f(u_2)]$ என்பது சார்பின் மிக உயர்ந்த மதிப்புக்கும் மிகக் குறைந்த மதிப்புக்கும் உள்ள வேறுபாடு ஆகிறது. இவ்வேறுபாட்டையே சார்பின் எல்லை வேறுபாடு (range) என்பர். மேல் எல்லை (upper limit), பெருமம் (maximum) என்ற சொற்கள் மிக உயர்ந்த மதிப்புக்கும், கீழ் எல்லை (lower limit), சிறுமம் (minimum) என்ற சொற்கள் மிகக் குறைந்த மதிப்புக்கும் இந்நூலில் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. ஆகவே, அளவுகோல் குணகம் என்பதை அளவுகோல் நீளத்திற்கும் சார்பின் எல்லை வேறுபாட்டுக்கும் உள்ள விகிதம் (ratio) என வரையறை செய்யலாம்.

$$\text{அளவுகோல் குணகம்} = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லைவேறுபாடு}}$$

அளவுகோல் நீளமும் சார்பின் எல்லைவேறுபாடும் எப்பொழுதும் மிகை எண்களாக இருக்கும். ஆதலால், அளவுகோல் குணகம் எப்பொழுதும் ஒரு மிகை எண்ணாகவே இருக்கும்.

$$x = mf(u)$$

என்னும் அளவுகோலில் u_1, u_2 என்ற அளவீடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் $m\,[f(u_1) \backsim f(u_2)]$ என்பதால்,

$$x = m \log u$$

என்னும் மடக்கை அளவுகோலில் 1, 10 என்ற அளவீடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் $m\,[\log 10 - \log 1]$ அதாவது, m எனத் தெரிகிறது. எனவே,

$$x = m \log u$$

என்னும் மடக்கை அளவுகோலில் ஒரு சுற்றுக்குரிய நீளம் m ஆகும்.

தொடக்கப் புள்ளி (Zero Point) : ஓர் அளவுகோலில் எந்தப் புள்ளியிலிருந்து தூரமானது அளக்கப்படுகிறதோ அந்தப் புள்ளிக்கு அந்த அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளி (zero point) எனப் பெயர். இதை ஆதி (origin) என்றும் சொல்லலாம். எனவே,

$$x = m f(u)$$

என்னும் அளவுகோலில் x என்பது தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து அளக்கப்பட்ட தூரமேயாகும். x-ன் மதிப்பைச் சுழிக்குச் சமப்படுத்தினால் கிடைக்கும் u-ன் மதிப்பை அளவீடாகக் கொண்ட புள்ளியே இந்த அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளி ஆகும். இதுவரை சொல்லப்பட்ட அளவுகோல்களின் (படங்கள் 1, 4, 5, 6, 7, 8) தொடக்கத்தில் தொடக்கப் புள்ளிக்கான அளவீடு இருந்ததால்தான், x என்பது அளவுகோலின் தொடக்கத்திலிருந்து u என்ற அளவீட்டுக்குள்ள தூரம் என அப்பொழுது சொல்லப்பட்டது. இனிமேல், x என்பது அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து u என்ற அளவீட்டுக்குள்ள தூரம் என்பதை நினைவிற் கொள்ளவேண்டும்.

$x = mu$ என்ற சீர் அளவுகோலிலும் (படம் 1)
$x = mu^2$ என்ற இருபடி அளவுகோலிலும் (படம் 4)
$x = mu^3$ என்ற முப்படி அளவுகோலிலும் (படம் 5)
$x = m\sqrt{u}$ என்ற இருபடிமூல அளவுகோலிலும் (படம் 6)

xஐச் சுழிக்குச் சமப்படுத்தினால் கிடைக்கும் u-ன் மதிப்பு 0 ஆகும். எனவேதான் மேற்கூறிய நான்கு அளவுகோல்களிலும் தொடக்கப் புள்ளியானது சுழிக்குறியாகும். ஆனால்,

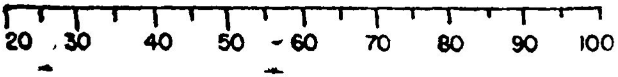
$x = m\left(\frac{1}{u}\right)$ என்ற தலைகீழ் அளவுகோலில் (படம் 7) $x = 0$ எனில் $u = \infty$. எனவே, இந்த அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியானது முடிவிலிக்குறியாகும். இதுபோல்,

$x = m \log u$ என்ற மடக்கை அளவுகோலில் (படம் 8) $x = 0$ எனில் $u = 1$. எனவே, இந்த அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியானது ஒன்றுக்குறியாகும். மேற்கூறியவற்றிலிருந்து, ஓர் அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியாகச் சுழிக்குறியைத் தவிர வேறு புள்ளிகளும் இருக்கக்கூடும் என்பது விளங்கும்.

படம் 1-ல் காட்டியுள்ள சீர் அளவுகோலின் ஒரு துண்டினைப் (segment) படம் 11 காட்டுகிறது. இந்த அளவுகோலில் முதற்குறிக்கான (first mark) அளவீடு 20 ஆகும். x என்பது முதற்குறியிலிருந்து அளக்கப்பட்ட தூரத்தைக் குறிக்குமாயின்,

$$x = 0.1\,u$$

என்ற சமன்பாடு இந்த அளவுகோலுக்குப் பொருந்தாது. இச்



படம் 11

சமன்பாடு படம் 11-ல் காட்டியுள்ள அளவுகோலுக்குப் பொருந்த வேண்டுமெனில், தூரத்தைச் சுழிக்குறியிலிருந்துதான் அளக்கவேண்டும். ஏனெனில்,

$$x = 0.1\,u$$

என்ற சமன்பாட்டினையுடைய அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளி சுழிக்குறியாகும். மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் $u = 20$ எனப் பதிவிட (substitute) $x = 2$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$x = m\,f(u)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட (calculated) தூரம், தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து அளக்கப்பட்ட தூரத்தைக் குறிக்கும் என்பதாலும், தூரத்தைச் செ. மீட்டரில் அளப்பதாலும், 20 என்னும் அளவீடு தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து 2 செ.மீ. தூரத்தில் உள்ளதென அறியலாம். எனவே, தொடக்கப் புள்ளியானது, 20 என்னும் அளவீட்டுக்கு, அதாவது முதற்குறிக்கு 2 செ.மீ. தூரத்தில் இடப்பக்கம் அமைந்துள்ளதெனக் கொள்ளவேண்டும். இதிலிருந்து தெரிவது யாதெனில், ஓர் அளவுகோலின் முதற்குறி தொடக்கப் புள்ளியாக இருக்கவேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை என்பதாகும்.

ஓர் அளவுகோலைக் கிடைக்கோட்டின் (horizontal line) மீது அமைத்தால் xஐ இடமிருந்து வலமாகவும், நிலைக்குத்துக்கோட்டின் (vertical line) மீது அமைத்தால் xஐக் கீழிருந்து மேலாகவும் அளப்பது மரபு. இடது, வலது என்ற சொற்கள் பயன்படுத்தப் பட்டால், அது கிடைக்கோட்டின்மீது அமைக்கப்பட்ட அளவு கோலைப் பற்றியதென்றும், கீழ், மேல் என்ற சொற்கள் பயன் படுத்தப்பட்டால் அது நிலைக்குத்துக் கோட்டின்மீது அமைக்கப் பட்ட அளவுகோலைப்பற்றியதென்றும் நினைவிற் கொள்க.

$f(u_1)$-ன் மதிப்பு ஒரு குறை எண்ணாக (negative number) இருப்பின்

$$x = m\,f(u)$$

என்னும் அளவுகோலில், u_1 என்ற அளவீடு அந்த அளவுகோலின்

தொடக்கப்புள்ளிக்கு இடப்பக்கம் அமையும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$x = mu$$

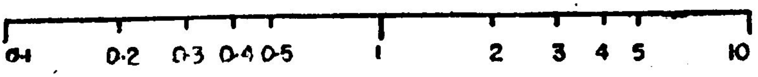
என்னும் சீர் அளவுகோலில், குறை எண்கள் சுழிக்குறிக்கு இடப்பக்கம் அமையும்.

$$x = m \log u$$

என்னும் மடக்கை அளவுகோலில், 1ஐ விடக் குறைந்த மதிப்புடைய மிகை எண்கள் ஒன்றுக் குறிக்கு இடப்பக்கம் அமையும். ஏனெனில், $0 < u < 1$ எனில், log u-ன் மதிப்பு ஒரு குறைஎண்ணாகும். u-ன் மதிப்பு ஒரு குறை எண்ணாக இருப்பின், log u-ன் மதிப்பு ஒரு கற்பனை எண் (imaginary number) ஆதலால், இந்த மடக்கை அளவுகோலில் குறைஎண்கள் அளவீடுகளாக வரமுடியாது. $\log O = -\infty$ என்பதால், சுழிக் குறியையும் இம்மடக்கை அளவுகோலில் குறிக்க இயலாது. மேலும்,

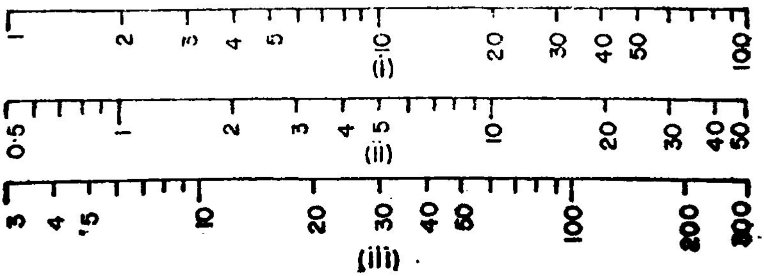
$$x = m \log u$$

என்னும் மடக்கை அளவுகோலில், 0.1 முதல் 1 முடிய, 0.01 முதல் 0.1 முடிய, 0.001 முதல் 0.01 முடிய, ... உள்ள அளவு



படம் 12

கோல்கள் யாவும் 1 முதல் 10 முடிய உள்ள அளவுகோலின் மறுபகர்ப்பே ஆகும் (படம் 12)



படம் 13

படம் 13-ல் மூன்று மடக்கை அளவுகோல்கள் காட்டப்பட்டுள்ளன. மூன்றும் 10 செ.மீ. நீளமுடையன.

மடக்கை அளவுகோலின் சமன்பாடு பொதுவாக,

$$x = m \log u$$

என இருக்கும். படம் 13 (i)-ல் log *u* என்ற சார்பின் எல்லை வேறுபாடு (log 100—log 1), அதாவது 2 ஆகும். படம் 13 (ii)-ல் log *u* என்ற சார்பின் எல்லை வேறுபாடு (log 50 — log 0.5), அதாவது 2 ஆகும். படம் 13 (iii)-ல் log *u* என்ற சார்பின் எல்லை வேறுபாடு (log 300 — log 3), அதாவது 2 ஆகும். எனவே,

$$m = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லைவேறுபாடு}}$$

என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து, படம் 13-ல் உள்ள மூன்று அளவு கோல்களுக்கும், அளவுகோல் குணகம் 5 எனத் தெரிகிறது. ஆகவே மூன்று அளவுகோல்களையும்

$$x = 5 \log u$$

என்ற சமன்பாட்டால் தெரிவிக்கலாம். இச் சமன்பாட்டைக் கொண்ட அளவுகோல் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒன்றுக் குறிதான் தொடக்கப் புள்ளியாக அமையும் என்பதில் ஐயம் இல்லை. படம் 13 (i)-ல் உள்ள அளவுகோலானது தொடக்கப் புள்ளியை முதற்குறியாகக் கொண்டுள்ளது. ஆனல், மற்ற இரண்டிலும் அப்படி இல்லை. படம் 13 (iii)-ல் உள்ள அளவுகோலில் தொடக்கப் புள்ளிக்கான ஒன்றுக்குறியையே காணவில்லை. படம் 11இல் காட்டப் பட்டுள்ள அளவுகோலிலும் தொடக்கப் புள்ளிக்கான சுழிக்குறி இடம் பெறவில்லை என்பதைக் காணலாம். படம் 13 (ii)-ல் தொடக்கப் புள்ளியானது, முதற்குறிக்கு இடப்பக்கமாக 5 log 3, அதாவது 2.3855 செ.மீ. தொலைவில் இருக்கும்.

$$x = 5 \log u$$

என்னும் சமன்பாட்டில் $u = 0.5$ எனப் பதிலீடு (substitution) செய்யின்,

$$\begin{aligned} x &= 5 \log 0.5 \\ &= 5 (\bar{1}.6990) \\ &= 5 (-0.3010) \\ &= -1.505. \end{aligned}$$

இஃது ஒரு குறை எண் ஆதலால், படம் 13 (ii)-ல் 0.5 என்னும் அளவீடு, தொடக்கப் புள்ளியான ஒன்றுக்குறிக்கு இடப்பக்கம் 1.505 செ.மீ. தொலைவில் அமைந்துள்ளது.

மேற்சொன்னவற்றிலிருந்து ஓர் அளவுகோலில் அதன் தொடக்கப் புள்ளி இடம் பெறலாம், அல்லது இடம் பெருமலும்

இருக்கலாம் என்றும், அப்படி அஃது இடம்பெறினும், அளவுகோலின் முதற்குறியாக அஃது இருக்கவேண்டிய கட்டாயம் இல்லை என்றும் தெரிகிறது.

இதுவரை மடக்கை அளவுகோலில் தொடக்கப்புள்ளியானது ஒன்றுக்குறியே ஆகும் எனச் சொல்லப்பட்டது. ஒன்றுக்குறியைத் தவிர, வேறு அளவீட்டுக்குரிய புள்ளி மடக்கை அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியாக இருக்கக்கூடாதா என்ற வினு சிலருக்கு எழுவதில் வியப்பில்லை. ஒன்றுக்குறியைத் தவிர, வேறு எந்த அளவீட்டுக்குரிய புள்ளியும் தொடக்கப்புள்ளியாக அமையலாம். ஆனால், அளவுகோல் சமன்பாடு,

$$x = m \log u$$

என்ற அமைப்பிலேயே இன்னும் இருக்காது. எடுத்துக்காட்டாக, 5 என்னும் அளவீட்டுக்கான புள்ளி ஒரு மடக்கை அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியாக இருக்க வேண்டுமெனில், அளவுகோல் சமன்பாடு,

$$x = m [\log u - \log 5]$$

என்று மாறிவிடும். இச் சமன்பாட்டில் uக்கு 5 எனப் பதிலிட x-ன் மதிப்பு 0 ஆகிறது. எனவே, இச் சமன்பாட்டுக்குரிய அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளி 5 என்ற அளவீட்டுக்கான புள்ளியாகும்.

பொதுவாக, $f(u)$ என்னும் சார்புக்கு u_0 என்ற அளவீட்டுக்கான புள்ளியைத் தொடக்கப்புள்ளியாகக் கொண்டு ஓர் அளவுகோல் அமைப்பின் அதன் அளவுகோல் சமன்பாடு,

$$x = m [f(u) - f(u_0)]$$

ஆகும்.

3. அளவுகோல்களின் அமைப்புமுறை (Construction of Scales)

ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுகோலை அமைப்பதற்கு, கீழ்க்கண்ட மூன்று கூறுகளையும் (factors) முன்னதாகவே முடிவு செய்து கொள்ளவேண்டும்:

(i) அளவுகோல் நீளம் : கிடைக்கக்கூடிய தாளின் அளவுக்குள் (size) அளவுகோல் நீளம் அடங்குமாறு பார்த்துக்கொள்ள வேண்டும்.

(ii) அடிப்படை அளவை அலகு (basic unit of measurement) அங்குலம் (inch), செ.மீ., மில்லி மீட்டர் (millimetre) போன்ற அலகுகளில் எந்த அலகில் வேண்டுமானாலும் தூரத்தை அளந்து கொள்ளலாம். இப் பாடநூலில், எளிமையைக் கருதிச் சென்டி மீட்டர்தான் எல்லா எடுத்துக்காட்டுகளிலும் அடிப்படை அளவை அலகாகப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

(iii) மாறியின் நெடுக்கம் (range of the variable) ஒரு மாறியின் கீழ் எல்லை எது, மேல் எல்லை எது என்பதைச் சொல்வதே மாறியின் நெடுக்கம் ஆகும். ஒரு மாறியின் மதிப்பானது 40 கிராம் (gram) முதல் 400 கிராம் முடிய மாறுபடுகிறது என்றால், அந்த மாறியின் நெடுக்கம் 40 முதல் 400 கிராம் முடிய ஆகும். இதை (40—400) கிராம் என அடைப்புகளுக்குள்ளும் எழுதலாம்.

மேற்கூறிய மூன்று கூறுகளையும் முடிவு செய்த பின்னர், அளவு கோல் குணகத்தை

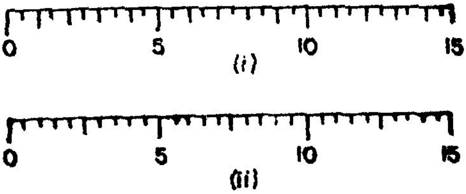
$$m = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லை வேறுபாடு}}$$

என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து கண்டுபிடித்துக்கொண்டு, அளவு கோலை அமைக்கத் தொடங்க வேண்டும்.

அளவுகோல் அமைப்பதில் நினைவிற் கொள்ளவேண்டியவை : அளவுகோல் அமைப்பதில் மிகச் சலிப்பூட்டும் வேலை அளவைக் குறியிடுவது (graduate) ஆகும். அளவுக் குறியீடுகளைக் கூரிய வரைகோலால் குறிக்கவேண்டும். மிக நெருக்கமாக அளவுக் குறியீடுகளை அமைப்பின், அளவீடுகளைப் படிப்பது கடினமாக இருக்கலாம். எனவே, நெருக்கமான அளவுக் குறியீட்டு அமைப்பைத் தவிர்ப்பது நல்லது. இடம் சுருக்கமாக இருக்கும்பொழுது பத்து அளவுக்குறியீடுகள் செய்வதற்குப் பதில் ஐந்து அளவுக்குறியீடுகள் செய்தால் அது கண்ணுக்கு இனிமையாக இருக்கும். 0.1 அலகுகளுக்கு அளவுக் குறியீடுகள் செய்யும் பொழுது அவை மிக நெருக்கமாகத் தெரிந்தால், 0.2 அலகுகளுக்கோ அல்லது 0.5 அலகுகளுக்கோ அளவுக் குறியீடுகள் செய்தால் போதுமானது. 0.25 அலகுகளுக்குள்ள அளவுக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துதல் குழப்பத்தை உண்டுபண்ணும்.

முதன்மையான (principal) உட்பிரிவுகளுக்கு (subdivisions) மட்டும் எண்ணிக்கையிட்டால் (numbering) அதுவே போதுமானது. பல சுற்றுகளைக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலை

அமைக்கும் பொழுது 100 முதல் 10,000 முடிய என மிகப்பெரிய அளவீடுகளையோ, 0.0001 முதல் 0.01 முடிய என மிகச்சிறிய அளவீடுகளையோ குறிக்க நேரலாம். அப்பொழுது 100, 1000, 10,000, 0.0001, 0.001, 0.01 போன்ற அளவீடுகளைமட்டும் அப்படியேயோ அல்லது 10^2, 10^3, 10^4, 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-2} என்றே குறிக்கவேண்டும். இடைப்பட்ட புள்ளிகளுக்கு 2, 3 4, ..., 9 என எண்ணிக்கையிட்டாலே போதும். 2, 3, 4, ..., 9 என்ற இவ்வெண்கள் 10^3-க்கும் 10^4-க்கும் இடையில் வரும்பொழுது 2000, 3000, 4000, ..., 9000 என்பதையே உணர்த்தும். அளவுக்குறியீடு செய்யும்போது வரையும் கீற்றின் நீளம், அந்த அளவீடு எந்த அளவுக்கு இன்றியமையாதது என்பதைக் காட்டும் கருவியாக அமைகிறது. வெவ்வேறு நீளமுள்ள கீறுகளை, பொதுவாக மூன்று வகைக்கு மேற்படாதவாறு, அளவுக்குறியீடு செய்யப் பயன்படுத்தலாம். முதன்மையான உட்பிரிவுகளுக்கு எண்ணிக்கையிட்டால் அதுவே அந்த அளவீடுகளின் இன்றியமையாமையைக் காட்டுகிறது. எனவே, முதன்மையான உட்பிரிவுகளுக்கும் ஏனைய உட்பிரிவுகளுக்கும் ஒரே நீளமுள்ள கீறுகளைப் பயன்படுத்தினாலே போதுமானது. தேவையற்ற உட்பிரிவுகளுக்கு அழுத்தம் கொடுத்தால் அது குழப்பத்தையே விளைவிக்கும். 0, 5, 10, 15 என்ற முதன்மையான உட்பிரிவுகளைக் கொண்ட



படம் 14

ஓர் அளவுகோலில் 0.5, 1.5, 2.5, ... போன்ற 0.5-இல் முடியும் எண்களுக்குக் குறுகிய கீறுகளையும், 1, 2, 3, ... போன்ற முழு எண்களுக்குச் சற்று நீண்ட கீறுகளையும் படம் 14 (i)-இல் காட்டியுள்ளதுபோல் பயன்படுத்தவேண்டும். படம் 14(ii)-இல் காட்டியுள்ளதுபோல் 2.5, 7.5, 12.5 போன்ற உட்பிரிவுகளுக்கு நீண்ட கீறுகளையும் மற்ற உட்பிரிவுகளுக்குக் குறுகிய கீறுகளையும பயன்படுத்துதல் நல்லதல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1

8 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டின்மீது, 0°C முதல் 100°C முடிய உள்ள வெப்பநிலைக்கு ஒரு சீர் அளவுகோல் அமை

(construct). 10°C இடைவெளிக்கு (interval) அளவுக்குறியீடுகள் செய்.

தேவையானது ஒரு சீர் அளவுகோல் ஆதலால், அளவுகோல் சமன்பாட்டை

$$x = mu$$

எனக் கொள்க.

$$m = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லை வேறுபாடு}}$$

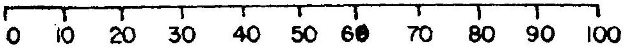
$$= \frac{8}{(100-0)}$$

$$= 0.08$$

எனவே, அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x = 0.08\,u$$

ஆகும். அளவுகோல் சீரானது ஆதலால் 0.08 செ.மீ. நீளம் ஒரு



படம் 15

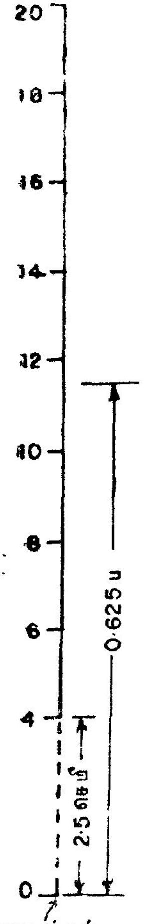
வெப்பநிலைப் பாகையைக் (degree) குறிக்கும். எனவே, 10°-ஆனது 0.8 செ.மீ. நீளத்தால் அளவுகோலில் குறிக்கப்படும். தேவையான அளவுகோலை அமைப்பதற்கு 8 செ. மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டை முதலில் வரைந்து கொள்ளவேண்டும். வசதிக்காக, கிடைக்கோடு வரையப்பட்டுள்ளது (படம் 15). செ.மீ. அளவுகளும் மி.மீ. அளவுகளும் குறிக்கப்பட்டு நடைமுறையில் உள்ள பொதுவான சீர் அளவுகோலை அதன் சுழிக்குறியானது (zero mark) வரையப்பட்ட நேர்கோட்டின் இடது முனையில் ஒன்றியிருக்குமாறு அந்நேர்கோட்டின்மீது வைக்கவேண்டும். அத்துடன் அந்த அளவுகோலிலுள்ள அளவீடுகள் இடமிருந்து வலமாகக் கூடிக் கொண்டு செல்லவேண்டும். பின்னர் அளவுகோலின் 0, 0.8, 1.6, 2.4, ..., 8 செ.மீ. அளவுகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு நேரே அளவுக்குறியீடுகள் செய்து முறையே 0, 10, 20, 30, ..., 100 என்னும் அளவீடுகளை எழுதினால் தேவையான அளவுகோல் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

4 முதல் 20 மணி முடிய உள்ள நேரத்திற்கு, 10 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டின்மீது ஒரு சீர் அளவுகோல் அமை. 2 மணி இடைவெளிக்கு அளவுக்குறியீடுகள் செய்.

தேவையான அளவுகோல் ஒரு சீர் அளவுகோல் ஆதலால் அதன் அளவுகோல் சமன்பாட்டை

$$x = mu$$



படம் 16

எனக் கொள்க.

$$m = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லை வேறுபாடு}}$$

$$= \frac{10}{(20-4)}$$

$$= 0.625$$

எனவே, அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x = 0.625\, u$$

ஆகும். அளவுகோல் சீரானது ஆதலால் 0·625 செ. மீ. நீளம் ஒரு மணியைக் குறிக்கும். எனவே, 2 மணி நேரம் 1.25 செ.மீ. நீளத்தால் அளவுகோலில் குறிக்கப்படும். 10 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நிலைக்குத்துக்கோட்டின் மீது செ.மீ., மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்டு நடைமுறையில் உள்ள சீர் அளவுகோலை, அதன் சுழிக்குறி நேர்கோட்டின் கீழ்முனையில் ஒன்றியிருக்குமாறும் அளவீடுகள் கீழிருந்து மேலாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லுமாறும் வைத்து 0, 1·25, 2·5, 3·75, ..., 10 செ.மீ. அளவுகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு நேரே அளவுக்குறியீடுகள் செய்து முறையே 4, 6, 8, 10, ..., 20 என்னும் அளவீடுகளை எழுதினால் தேவையான அளவுகோல் கிடைக்கும் (படம் 16).

அளவுகோல் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்படும் தூரம், தொடக்கப்புள்ளியான சுழிக்குறியிலிருந்து அளக்கப்பட்ட தூரம் ஆகும். 4 என்னும் அளவீட்டிலிருந்து, அதாவது, முதற்குறியிலிருந்து அளக்கப்பட்ட தூரமல்ல. $u = 4$ எனில், $x = 2.5$. எனவே 4 என்ற அளவீடு, தொடக்கப்புள்ளிக்கு மேலே 2.5 செ. மீ. தூரத்தில் இருக்கும். எனவே,

$$x = 0.625\, u$$

என்ற அளவுகோலில் 4 என்னும் அளவீட்டிலிருந்து வேறு எந்த அளவீட்டுக்குமுள்ள தூரத்தைக் காண, அளவுகோல் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்படும் தூரத்தில் 2·5 செ.மீ. தூரத்தைக் கழித்து

விட வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, 15 என்ற அளவீட்டுக்கு 4 என்ற அளவீட்டிலிருந்து உள்ள தூரம் [(0·625) 15—2·5] ஆதாவது, 6·875 செ.மீ. ஆகும் பொதுவாக, u_2 என்ற அளவீட்டுக்கு u_1 என்ற அளவீட்டிலிருந்து உள்ள தூரம் 0·625 $(u_2—u_1)$ செ.மீ. ஆகும்.

தொடக்கப்புள்ளிக்கான சுழிக்குறியை அளவுகோலின் மீது குறிக்கத் தேவையில்லை என்றாலும் அது முதற்குறிக்குக் கீழே 2·5 செ.மீ. தொலைவில் இருக்கும் எனப் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 3

9 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டின்மீது 3 முதல் 50 மீட்டர்/நொடி (metre/second) முடிய உள்ள திசை வேகத்திற்கு (velocity) ஒரு மடக்கை அளவுகோல் அமை. 3 முதல் 10 மீ./நொடி முடிய 1 மீ./நொடி இடைவெளிக்கும், 10 முதல் 50 மீ./நொடி முடிய 10 மீ./நொடி இடைவெளிக்கும் அளவுக் குறியீடுகள் செய்.

தேவையானது ஒரு மடக்கை அளவுகோல் ஆதலால், அளவுகோல் சமன்பாட்டை

$$x = m \log u$$

எனக் கொள்க. u-வின் நெடுக்கம் 3 முதல் 50 முடிய ஆகும். எனவே, $\log u$ என்ற சார்பின் எல்லைவேறுபாடு

$$= \log 50 - \log 3$$

$$= 1\cdot6990 - 0.4771$$

$$= 1\cdot2219$$

ஆகவே $m = \dfrac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லை வேறுபாடு}}$

$$= \frac{9}{1\cdot2219}$$

$$= 7.365.$$

m-ஐ ஒரு முழு எண்ணாக எடுத்துக் கொண்டால் கணக்கீடுகள் (computations) எளிமையாக இருக்கும். எனவே, m-ன் மதிப்பை 7 எனக் கொள்ளலாம். கணக்கிடப்பட்ட 7.365-ஐ விடக் கூடுதலான மதிப்பை அளவுகோல் குணகமாக (scale modulus) எடுத்துக் கொண்டால், அளவுகோலை அமைக்கக் கொடுக்கப்பட்ட

நீளமான 9 செ.மீட்டரைக் காட்டிலும் மிகுதியான நீளம் தேவைப் படுகிறது. m-ஐ 7 எனக் கொள்வதால் 3 முதல் 50 முடிய உள்ள அளவீடுகளை 7 (1.2219), அதாவது 8.5533 செ.மீ. நீளத்தில் குறித்துவிடலாம். அல்லது கொடுக்கப்பட்ட 9 செ.மீ. நீளத்தில் 50-க்கு மேலாக உள்ள சில எண்களுக்கும் அளவுக்குறியீடுகள் செய்யலாம். எனவே, m-ஐ 7 என எடுத்துக்கொள்வதில் தவறொன்றும் இல்லை. இப்பொழுது அளவுகோல் சமன்பாடு

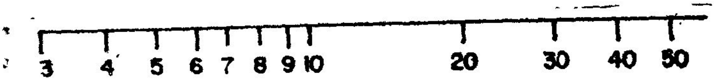
$$x = 7 \log u$$

ஆகும். ஆகவே, ஒரு சுற்றுக்குரிய அளவுகோல் சரியாக 7 செ.மீ. நீளத்தில் அமையும். இந்த அளவுகோலில் u என்ற அளவீடானது 3 என்ற அளவீட்டிலிருந்து 7 [$\log u - \log 3$] அதாவது ($7 \log u - 3.3397$) செ.மீ. தூரத்தில் இருக்கும். எனவே, u-வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான இத்தூரங்களைக் கணக்கிட்டு அட்டவணைப்படுத்திக் (tabulate) கொண்டால் அளவுகோலை அமைப்பதற்கு வசதியாக இருக்கும்.

அட்டவணை (table) - 1

u	$\log u$	$7 \log u$	$7 \log u - 3.3397$
3	0.4771	3·3397	0
4	0.6021	4·2147	0·8750
5	0.6990	4·8930	1·5533
6	0.7782	5·4474	2·1077
7	0.8451	5·9157	2·5760
8	0.9031	6·3217	2·9820
9	0.9542	6·6794	3·3397
10	1.0000	7·0000	3·6603
20	1.3010	9·1070	5·7673
30	1.4771	10·3397	7·0000
40	1.6021	11·2147	7·8750
50	1.6990	11·8930	8·5533

அட்டவணை 1-ன் இறுதி நிரலில் (column) உள்ள எண்கள் 1 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைச் செ.மீட்டரில் குறிக்கின்றன. எனவே, செ.மீ., மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலை 9 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு கிடைக்கோட்டின் மீது எடுத்துக்காட்டு 1-ல் சொன்னது போல் வைத்து 0, 0.8750, 1.5533, ..., 8.5533 செ.மீ அளவுகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு நேரே அளவுக்குறியீடுகள் செய்து முறையே 3, 4, 5, ..., 50 என்ற அளவீடுகளை எழுதினால் தேவையான அளவுகோல் கிடைக்கும் (படம் 17). செ மீ.,



படம் 17

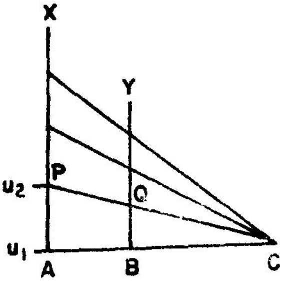
மி. மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலின் 0.8 அல்லது 0.9 செ. மீ. அளவுகளுக்கான புள்ளிகளைத் துல்லியமாகக் குறித்துவிடலாம். ஆனால் 0.8750 செ மீ அளவுக்கான புள்ளியைக் கண்மதிப்பாகத்தான் குறிக்கமுடியும் 9 செ.மீ. நீளமுள்ள நேர்கோட்டை முதலில் வரைந்து கொண்டாலும் தேவையான அளவுகோல் 8.5533 செ.மீ நீளத்திற்குள் அடங்கி விடுவதைக் காண்க. கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பைக் காட்டிலும் குறைவான மதிப்பை அளவுகோல் குணகமாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டதே இதன் காரணம் ஆகும்.

வடிவியல் சார்ந்த அளவுகோல் அமைப்பு முறை : முதல் இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் அளவுகோல் அமைப்பது மிக எளிமையாக இருந்தது. ஆனால் எடுத்துக்காட்டு 3-இல் அளவுகோல் அமைப்பதற்குச் செய்த கணக்கீடுகள் மிகுதி. சில சூழ்நிலைகளில் இம்மாதிரியான கணக்கீட்டுச் சுமையைக் குறைத்துக் கொள்வதற்கு வழிகள் உள்ளன. ஒரு சார்புக்கு, ஏதேனும் ஓர் அளவுகோல் குணகத்திற்கு அளவுகோல் கிடைக்குமாயின், அதே சார்புக்கு, வேறொரு அளவுகோல் குணகத்திற்கு அளவுகோல் அமைப்பது எளிது. அட்டவணை 1-ல் கண்டபடி, கணக்கீடுகள் எதுவும் தேவையில்லை. அளவுகோலின் அளவுகோல் குணகத்தை மாற்றியமைக்கும் முறைகள் சிலவற்றைக் கீழ்க்கண்ட பகுதிகள் விரித்துரைக்கும். இம்முறைகள் அனைத்திற்கும் தளவடிவியலின் உதவி தேவை.

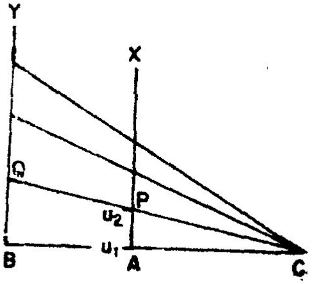
விகிதசம விளக்கப்படங்கள் (Proportional Charts) அல்லது குணக விளக்கப்படங்கள் (Modulus charts) : ஒரு சார்புக்கு m-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக்கொண்ட அளவுகோல் முன்பே கிடைக்கக்கூடியதெனில், வடிவொத்த

முக்கோணங்களின் (similar triangles) பொதுப்பண்புகளைப் பயன் படுத்தி, அந்தச் சார்புக்கு m'-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக் கொண்ட அளவுகோலை அமைக்கலாம்.

AX என்ற நேர்கோட்டின் மீதுள்ள அளவுகோலானது (படங்கள் 18, 19) $f(u)$ என்ற சார்புக்கு, m-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக் கொண்டு அமைக்கப்பட்டதெனக் கொள்க. இதில் A என்ற புள்ளிக்



படம் 18



படம் 19

கான அளவீட்டை u_1 என்க. $f(u)$ என்ற சார்புக்கு m'-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக் கொண்டு ஓர் அளவுகோல் அமைப்பதற்கு, AX-க்குச் செங்குத்தாக (perpendicular) A வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் மீது $AC : BC = m : m'$ என்றிருக்குமாறு B, C என்ற இரு புள்ளிகளைக் குறிக்க வேண்டும். இதில் C என்ற புள்ளி ஒரு முனைப்புள்ளியாக (extremity) இருக்கவேண்டும். $m' < m$ எனில், B என்ற புள்ளி A-க்கும் C-க்கும் இடையில் இருக்கும் (படம் 18). $m' > m$ எனில், A என்ற புள்ளி B-க்கும் C-க்கும் இடையில் இருக்கும் (படம் 19). பின்னர் AX அளவுகோலின் மீது உள்ள அளவுக் குறியீடுகளுக்கு C-யிலிருந்து நேர்கோடுகள் வரைய வேண்டும். இந்தக் கோடுகளோ அல்லது இவற்றை நீட்டிவிட்ட கோடுகளோ, AX-க்கு இணையாக (parallel) B வழியே செல்லும் BY என்ற நேர்கோட்டை வெட்டும் புள்ளிகளே, $f(u)$ என்ற சார்புக்கு, m'-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட அளவுகோலின் ஒத்த (corresponding) அளவுக் குறியீடுகள் ஆகும்.

AX அளவுகோலில், u_2 என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளியை P என்க. CP என்ற நேர்கோடோ அல்லது CP-ஐ நீட்டிவிட்ட நேர்கோடோ BY என்ற நேர்கோட்டை Q என்ற புள்ளியில்

வெட்டட்டும். APC , BQC என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து,

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{AC}{BC}$$

அதாவது, $$\frac{AP}{BQ} = \frac{m}{m'}$$

AX அளவுகோலின் அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x = mf(u)$$

என்பதாலும், A, P என்ற புள்ளிகளின் அளவீடுகள் முறையே u_1, u_2 என்பதாலும்

$$AP = m\,[f(u_2) - f(u_1)]$$

எனவே, $$\frac{m\,[f(u_2) - f(u_1)]}{BQ} = \frac{m}{m'}$$

குறுக்குப் பெருக்கிச் (cross multiplying) சுருக்கினால்

$$BQ = m'\,[f(u_2) - f(u_1)]$$

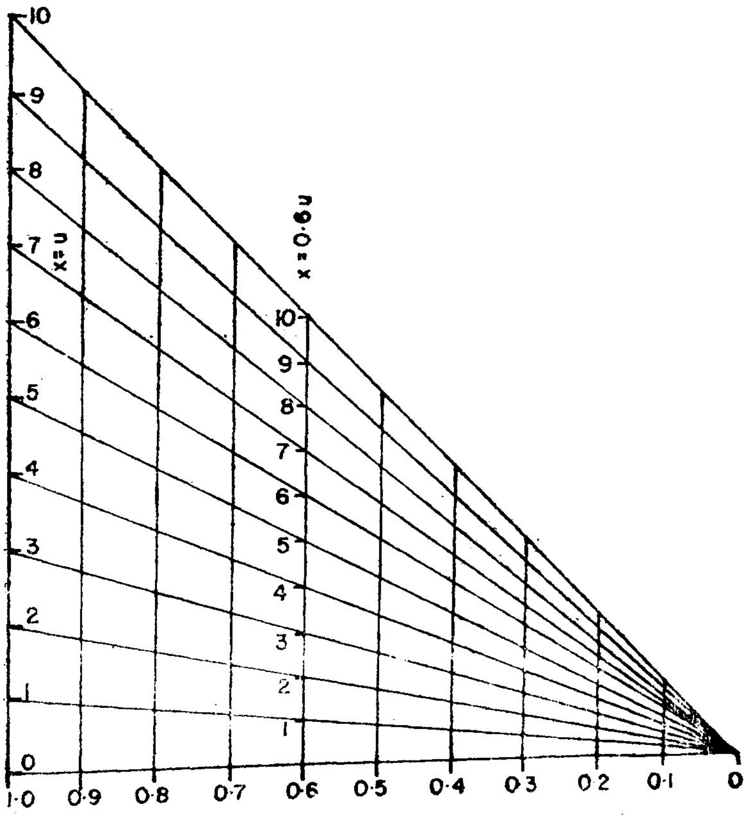
எனவே, $$x = m'\,f(u)$$

என்ற சமன்பாட்டை உடைய BY அளவுகோலில் B என்ற புள்ளி u_1 என்ற அளவீட்டைக் குறிப்பதாகக் கொண்டால், Q என்ற புள்ளி u_2 என்ற அளவீட்டைக் குறிக்குமென விளக்கம் கிடைக்கிறது. ஆகவேதான் AX அளவுகோலின் மீதுள்ள அளவுக் குறியீடுகளை C என்ற புள்ளியுடன் நேர்கோடுகளால் இணைக்கும் பொழுது, அவைகளுக்கு ஒத்த அளவுக் குறியீடுகள் BY அளவு கோலின் மீது கிடைக்கின்றன.

B, C என்ற இருபுள்ளிகளும் AX-க்குச் செங்குத்தான கோட்டின்மீதுதான் இருக்கவேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை. A வழியாகச் செல்லும் எந்தக் கோட்டின் மீதும் AC : BC = $m : m'$ என்றிருக்குமாறு இப்புள்ளிகளைக் குறித்துக் கொள்ளலாம். ஆனால் BY என்ற நேர்கோடு AX-க்கு இணையாக இருக்கவேண்டும். B, C என்ற புள்ளிகள் A வழியாகச் செல்லும் எந்தக் கோட்டின் மீது இருப்பினும், △ APC , △ BQC இரண்டும் வடிவொத்தனவாகவே இருப்பதால் மேற்கூறிய விளக்கமே இவ்வகைக்கும் பொருந்தும்.

மேலே சொன்ன வடிவியற் கோட்பாட்டைப் (geometrical principle) பயன்படுத்தி, பல்வேறு அளவுகோல் குணகங்களுக்குச்

சீர் அளவுகோல்களைக் கொடுக்கும் ஒரு விளக்கப்படத்தைப் (chart) படம் 20-ல் காட்டியவாறு அமைத்துக் கொள்ளலாம்.



படம் 20

இப்படத்திற்கு விகித சம விளக்கப்படம் (proportional chart) அல்லது குணக விளக்கப்படம் (modulus chart) எனப் பெயர்.

$$x = mu$$

என்ற அமைப்பிலுள்ள அளவுகோல்களை அமைக்க இது பயன்படுகிறது.

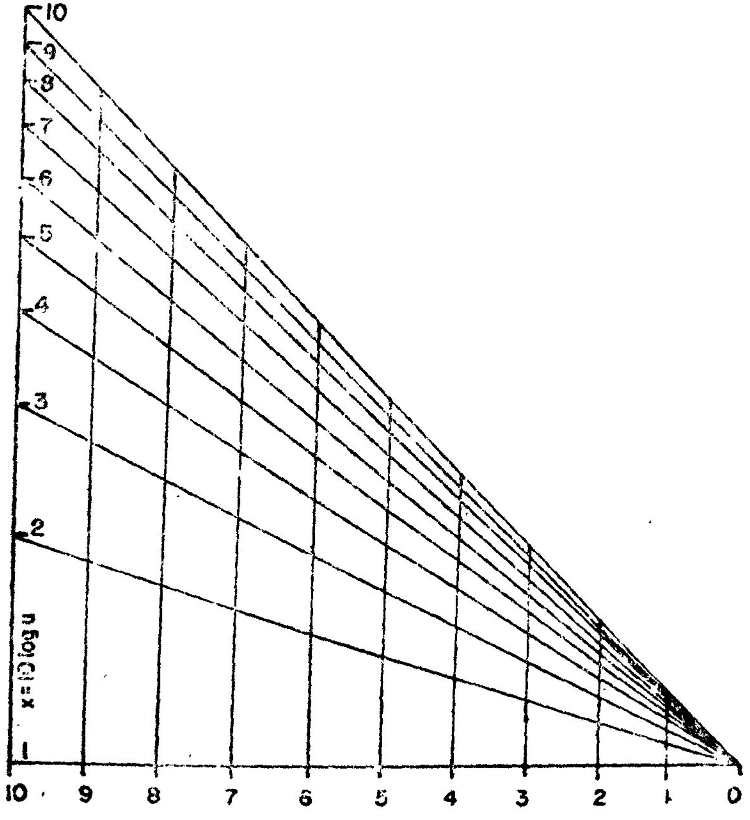
$$x = u$$

என்ற அளவுகோலை முதன்மை அளவுகோலாகக் (primary scale) கொண்டு இப்படம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அளவை அலகு செ.மீ. என்பதால் இம் முதன்மை அளவுகோலில் ஒரு

செ.மீ. நீளம் *u*-வின் ஓர் அலகைக் குறிக்கும். முன்னரே கிடைக்கக் கூடிய அளவுகோலை முதன்மை அளவுகோல் எனலாம். படங்கள் 18, 19 ஆகியவற்றில் AX அளவுகோல் முதன்மை அளவுகோலாகும் முதன்மை அளவுகோலின் உதவி யால் தேவைப்படும் ஏனைய அளவுகோல்களை அமைத்துக் கொள்ள லாம். படம் 20-இல் கிடைக்கோட்டின் மீது சம இடைவெளி யில் குறிக்கப்பட்டுள்ள 1.0, 0.9, 0.8, ..., 0.1, 0 என்ற எண்கள் *m*- ன் மதிப்புகள் ஆகும். இப்படத்தைப் பயன்படுத்தி

$$x = 0.6\,u$$

என்ற அளவுகோலை அமைக்க, முதலில் $m = 0.6$ என்பதற்கான நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மீது மடிப்பு (fold) விழுமாறு படத்தை



படம் 21

மடித்துக் கொள்ளவேண்டும். பின்னர், எந்தக் கோட்டின் மீது அளவுகோலை அமைக்க வேண்டுமோ அந்தக் கோட்டின் மீது

இம்மடிப்புப் படியுமாறு வைத்துத் தேவையான அளவுக் குறியீடு களைக் குறிக்கவேண்டும்.

விகிதசம விளக்கப்பட முறையில், கணக்கீட்டு வேலை மிகக் குறைவு. எனவே காலம் வீணாவதில்லை. கணக்கீடு செய்து அமைக்கும் அளவுகோலைப் போலவே, விகிதசம விளக்கப் பட முறையில் அமைக்கப்படும் அளவுகோலும் எதிர்பார்க்கும் அளவுக்குத் துல்லியமாக இருக்கும்.

பல்வேறு அளவுகோல் குணகங்களுக்கான மடக்கை அளவு கோல்களைக் கொடுக்கும் விளக்கப்படம், படம் 21-இல் அமைக் கப்பட்டுள்ளது.

$$x = m \log u$$

என்ற அமைப்பில் உள்ள அளவுகோல்களை அமைக்க இது பயன் படுகிறது.

$$x = 10 \log u$$

என்ற அளவுகோலை முதன்மை அளவுகோலாகக் கொண்டு அமைக்கப்பட்டுள்ள இப்படத்தில் கிடைக்கோட்டின்மீது குறிக்கப் பட்டுள்ள எண்கள் m-ன் மதிப்புகள் ஆகும்.

அளவீடுகளை மாற்றி அளவுகோல் குணகத்தை மாற்றியமைக்கும் முறை:

$$x = mu$$

என்ற சீர் அளவுகோலின் சமன்பாட்டை

$$x = k\ m\left(\frac{u}{k}\right)$$

என மாற்றி அமைத்துக் கொள்ளலாம். இதை அடிப்படையாகக் கொண்டு, m என்ற அளவுகோல் குணகம் கொண்ட சீர் அளவு கோலிலிருந்து km என்ற அளவுகோல் குணகம் கொண்ட சீர் அளவுகோலைப் பின்கண்டவாறு அமைக்கலாம். k என்பது ஒரு மிகை எண்ணாக இருக்கவேண்டும். k-ன் மதிப்பு 1-ஐ விடக் கூடுதலாகவோ குறைவாகவோ இருக்கலாம்.

எந்த நேர்கோட்டின்மீது km என்ற அளவுகோல் குணகம் கொண்ட அளவுகோலை அமைக்கவேண்டுமோ அந்த நேர் கோட்டின்மீது m என்ற அளவுகோல் குணகம் கொண்ட அளவு கோலைப் படிய வைக்கவேண்டும். பின்னர், m-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக் கொண்ட அளவுகோலின் அளவீடு u என இருப்பின்

அதற்குரிய புள்ளியை அந்த நேர்கோட்டின்மீது குறித்து, அதற்கு $\frac{u}{k}$ என அளவீடு செய்யவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$x = 5\ u$$

என்ற அளவுகோல் வேண்டுமாயின்

$$x = u$$

என்ற அளவுகோலை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது படியவைத்து, பின்னர் இந்த அளவுகோலின் 1, 2, 3, ... என்ற அளவீடு களுக்குரிய புள்ளிகளை அந்த நேர்கோட்டின்மீது குறித்து, அவை களுக்கு 0.2, 0.4, 0 6 , ... என்று அளவீடுகள் செய்யவேண்டும். ஏனெனில், இங்கு k-ன் மதிப்பு 5 ஆகும். எனவே, முதன்மை அளவுகோலின் அளவீடுகளை 5-ஆல் வகுத்தால் தேவையான அளவுகோலின் ஒத்த அளவீடுகள் கிடைக்கும். இதேபோன்று

$$x = 0.05\ u$$

என்ற அளவுகோல் வேண்டுமெனில்

$$x = u$$

என்ற அளவுகோலை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது படியவைத்து பின்னர் இந்த அளவுகோலின் 1, 2, 3,...... என்ற அளவீடுகளுக் குரிய புள்ளிகளை அந்த நேர்கோட்டின்மீது குறித்து, அவைகளுககு 20, 40, 60, ... என்று அளவீடுகள் செய்யவேண்டும். ஏனெனில், இங்கு k-ன் மதிப்பு 0.05 ஆகும். எனவே, முதன்மை அளவுகோலின் அளவீடுகளை 0.05-ஆல் வகுத்தால் அதாவது, 20-ஆல் பெருக்கினால் தேவையான அளவுகோலின் ஒத்த அளவீடுகள் கிடைக்கும்.

m என்ற அளவுகோல் குணகம் கொண்ட மடக்கை அளவு கோல் கிடைக்கும் பொழுது, $k\,m$ என்ற அளவுகோல் குணகம் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலை எவ்விதம் அமைப்பது?

$$x = m\ \log u$$

என்ற மடக்கை அளவுகோலின் சமன்பாட்டை

$$x = k\,m \left(\frac{1}{k}\ \log\ u\right)$$

$$\text{அதாவது}\quad x = k\,m \left(\log u^{\frac{1}{k}}\right)$$

என்று மாற்றி அமைத்துக் கொள்ளலாம். எனவே, km என்ற அளவுகோல் குணகம் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலை அமைக்க, m என்ற அளவுகோல் குணகம் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது படிய வைத்து, பின்னர் m-ஐ அளவு

கோல் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலின் அளவீடு u என இருப்பின் அதற்குரிய புள்ளியை அந்த நேர்கோட்டின்மீது குறித்து, அதற்கு $u^{\frac{1}{k}}$ என அளவீடு செய்யவேண்டும் எடுத்துக்காட்டாக,

$$x = 50 \log u$$

என்ற அளவுகோல் வேண்டுமெனில்,

$$x = 10 \log u$$

என்ற அளவுகோலை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது படிய வைத்து, பின்னர் இந்த அளவுகோலின் 1^5, 2^5, 3^5, ... என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளை அந்த நேர்கோட்டின்மீது குறித்து, அவைகளுக்கு 1, 2, 3, ... என்று அளவீடுகள் செய்யவேண்டும். ஏனெனில் இங்கு k-ன் மதிப்பு 5 ஆகும். எனவே முதன்மை அளவுகோலின் அளவீடுகளின் ஐந்துபடி மூலங்களே (fifth roots) தேவையான அளவுகோலின் ஒத்த அளவீடுகள் ஆகும். இதே போன்று

$$x = 7.5 \log u$$

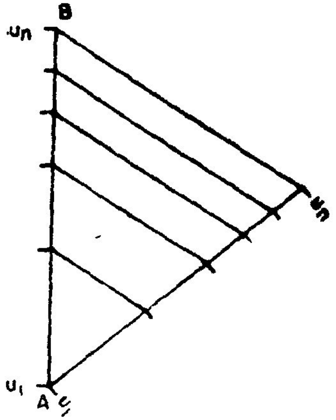
என்ற அளவுகோல் வேண்டுமெனில்

$$x = 15 \log u$$

என்ற அளவுகோலை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது படியவைத்து பின்னர் இந்த அளவுகோலின் 1, 2, 3, ... என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளை அந்த நேர்கோட்டின்மீது குறித்து, அவைகளுக்கு 1^2, 2^2, 3^2, ... என்று அளவீடுகள் செய்யவேண்டும். ஏனெனில் இங்கு k-ன மதிப்பு $7 \cdot 5/15$ அதாவது $\frac{1}{2}$ ஆகும். எனவே, $\frac{1}{k}$-யின் மதிப்பு 2 ஆகும். ஆகவே முதன்மை அளவுகோலின் அளவீடுகளின் இருபடிகளே தேவையான அளவுகோலின் ஒத்த அளவீடுகள் ஆகும்.

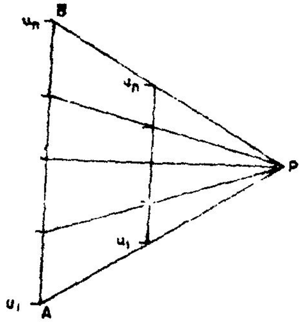
இணைகோடுகள் முறை (Method of Parallel Lines): ஏதேனும் ஓர் அளவுகோல் குணகத்துடன் $f(u)$ என்ற சார்புக்கு u_1 முதல் u_n முடிய அளவீடுகள் செய்யப்பட்ட அளவுகோல் முன்னரே கிடைக்குமாயின் AB என்ற ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டின் மீது, $f(u)$ என்ற அதே சார்புக்கு u_1 முதல் u_n முடிய அளவீடுகள் செய்யப்பட்ட அளவுகோலைக் கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கலாம். முதன்மை அளவுகோலை AB-க்கு வசதியான கோணத்தில் (angle) சாய்ந்திருக்குமாறும் முதன்மை அளவு

கோலின் u_1 என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளி A - யில் ஒன்றியிருக்குமாறும் வைக்கவேண்டும் (படம் 22). பின்னர் முதன்மை அளவு கோலின் u_n என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளியையும் B – ஐயும் ஒரு நேர்கோட்டால் இணைக்கவேண்டும். இந்நேர்கோட்டுக்கு



படம் 22

இணையாக இருக்குமாறு, முதன்மை அளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகள் வழியே நேர்கோடுகள் வரைந்தால் இந்த இணை கோடுகள் (parallel lines) AB-ஐ ஒத்த அளவுக் குறியீடுகளில் வெட்டும்.



படம் 23

புள்ளிவழிக் கோடுகள் முறை (Lines through a point method). ஏதேனும் ஓர் அளவுகோல் குணகத்துடன் $f(u)$ என்ற சார்புக்கு u_1 முதல் u_n முடிய அளவீடுகள் செய்யப்பட்ட அளவு கோலை முதன்மை அளவுகோலாகக் கொண்டு, AB என்ற ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டின் மீது, $f(u)$ என்ற அதே சார்புக்கு u_1

முதல் u_n முடிய அளவீடுகள் செய்யப்பட்ட அளவுகோலை ஒரு புள்ளி வழியே பல நேர்கோடுகள் வரைந்தும் அமைக்கலாம். இதற்கு முதன்மை அளவுகோலை AB -க்கு இணையாக வசதியான தூரத்தில் முதலில் வைக்கவேண்டும் (படம் 23). பின்னர் A, B என்ற புள்ளிகளை முறையே முதன்மை அளவுகோலின் u_1, u_n என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளோடு நேர்கோடுகளால் சேர்க்க வேண்டும். இவ்விரு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியை P என்க. P-யிலிருந்து முதன்மை அளவுகோலின் அளவுக்குறியீடுகளுக்கு வரைந்த நேர்கோடுகளோ அல்லது இவற்றை நீட்டிவிட்ட நேர்கோடுகளோ AB- ஐ ஒத்த அளவுக் குறியீடுகளில் வெட்டும்.

இணைகோடுகள் முறை, புள்ளிவழிக்கோடுகள் முறை ஆகிய இரண்டிலும் கணக்கீட்டு வேலை இல்லை என்பதோடு கொடுக்கப் பட்ட எந்த நீளத்திலும் தேவையான அளவுகோலைச் சரியாக அமைத்துக் கொள்ளலாம் என்ற மற்றொரு நன்மையும் உண்டு.

ஒரு சார்ப்பு அளவுகோலிலிருந்து அதே சார்புக்கு, அளவு கோல் குணகத்தைக் கூட்டியோ குறைத்தோ அளவுகோல் அமைக்கும் முறைகள் சில விளக்கப்பட்டன. அளவுகோல் குணகம் குறைக்கப்படுமாயின் சில அளவுக்குறியீடுகள் மிக நெருக்கமாக அமையலாம். அப்பொழுது ஒன்றுவிட்டு ஒன்றுள்ள (alternate) அளவுக்குறியீடுகளைக் குறிக்காமல் விட்டுவிடலாம். இது மிக எளிது. ஆனால், அளவுகோல் குணகம் கூடுதலாக்கப்படு மாயின் அளவுக்குறியீடுகளுக்கிடையே மிகுந்த இடைவெளி காணப்படும். எனவே, இந்த இடைவெளிகளில் இன்னும் சில அளவுக்குறியீடுகள செய்யவேண்டிய நிலைமை ஏற்படலாம். முதன்மை அளவுகோலை அமைக்க எவ்வளவு வேலை இருக்குமோ, அதே அளவு வேலை இதற்கும் இப்பொழுது தேவைப்படும். இந் நிலைமையைத் தவிர்க்க, தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளும் முதன்மை அளவுகோலின் அளவுகோல் குணகத்திற்கும் அமைக்கவேண்டிய அளவுகோலின் அளவுகோல் குணகத்திற்கும் உள்ள வேறு பாடானது, கூடியமட்டும் குறைவாக இருக்கும்படி பார்த்துக் கொள்ளவேண்டும்.

படித்தர அளவுகோல்கள் (Standard Scales); வரைபட முறை களில் அடிக்கடி வரக்கூடிய படித்தர அளவுகோல்களுள் மிக இன்றியமையாதன சீர் அளவுகோலும் மடக்கை அளவுகோலுமே ஆகும். எனவே, இந்த அளவுகோல்களைப் பல்வேறு அளவு கோல் குணகங்களுக்கு முன்னேற்பாடாக அமைத்து வைத்துக்

கொள்வது நல்லது. சீர் அளவுகோலை அமைப்பதற்குக் கணக்கீடுகள் குறைவு. ஆனால், மடக்கை அளவுகோலை அமைப்பதற்குக் கணக்கீடுகள் மிகுதி. 2.5, 5, 10, 15, 20 ஆகிய அளவுகோல் குணகங்களுக்கு அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோல்கள் நழுவு கணிப்பான் (slide rule) வைத்திருப்பவர்களிடம் பெரும்பாலும் இருக்கும். எனவே, மடக்கை அளவுகோல்கள் வரும் கணக்குகளில் இயன்றவரை அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்து மாறு பார்த்துக்கொள்ளவேண்டும். அச்சடித்த மடக்கை அளவு கோல்கள் இல்லாதவர்களுக்கு உதவியாக 1 முதல் 20 முடிய உள்ள m-இன் மதிப்புகளுக்கு

$$x = m \log u$$

என்ற அளவுகோல்களைக் கொண்ட விகிதசம விளக்கப்படம் ஒன்று இந் நூலின் இணைப்பாகத் தரப்பட்டுள்ளது. இருபடி அளவு கோல், முப்படி அளவுகோல், இருபடிமூல அளவுகோல், தலைகீழ் அளவுகோல் போன்ற மற்ற படித்தர அளவுகோல்களைத் தேவை ஏற்படும்பொழுது வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்கான தூரங்களைக் கணக்கிட்டு அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4

13 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டின்மீது 1500 முதல் 20,000 செ.மீ.^{2} முடிய உள்ள பரப்புக்கு (area) ஒரு மடக்கை அளவுகோல் அமை. இதில் 1500, 2000, 3000,...... 10,000, 15,000, 20,000 செ.மீ.^{2} பரப்பினைக் காட்ட அளவுக்குறியீடுகள் செய்.

விகிதசம விளக்கப்பட முறை, இணைகோடுகள் முறை, புள்ளிவழிக் கோடுகள் முறை ஆகிய மூன்று முறைகளிலும் தேவையான அளவுகோலை அமைக்கலாம். விகிதசம விளக்கப்பட முறையில் அளவுகோல் அமைக்கும்விதம் முதலில் விளக்கப் பட்டுள்ளது. தேவையானது ஒரு மடக்கை அளவுகோல் ஆதலால் அளவுகோல் சமன்பாட்டை

$$x = m \log A$$

எனக் கொள்க. இதில் A என்பது பரப்பினைச் செ.மீ.^{2} அலகில் குறிக்கும்.

$$m = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லை வேறுபாடு}}$$

$$= \frac{13}{(\log 20{,}000 - \log 1500)}$$

$$= \frac{13}{(4.3010 - 3.1761)}$$

$$= \frac{13}{1.1249}$$

$$= 11.55$$

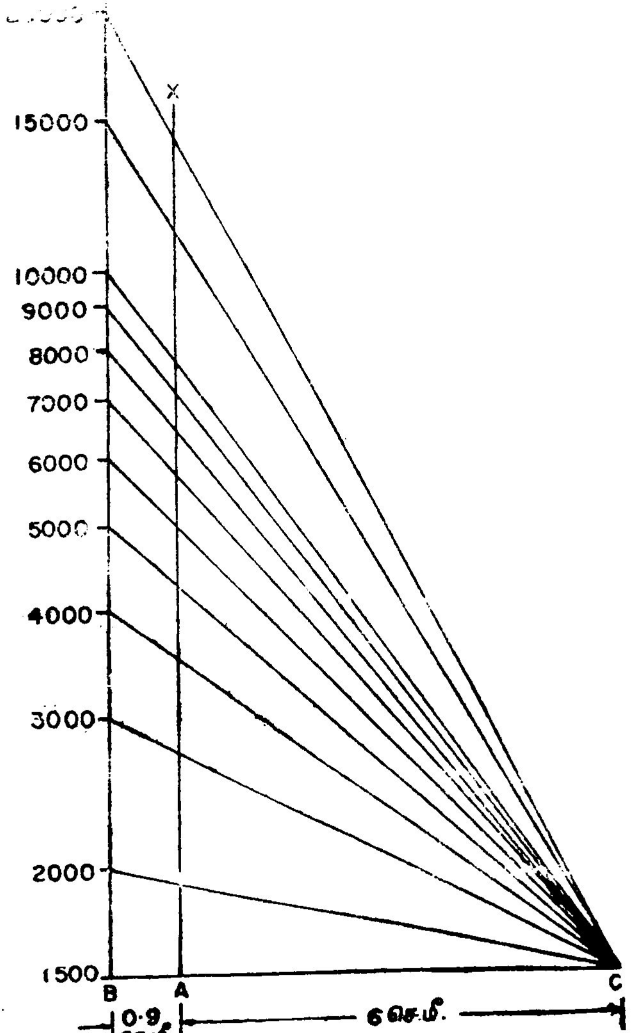
இப்பொழுது அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x = 11.55\ A$$

ஆகும். இந்நூலின் இணைப்பாகத் தரப்பட்டுள்ள மடக்கை அளவுகோல்களின் விகிதசம விளக்கப்படத்தில் உள்ள $m = 11.55$ என்பதற்கான அளவுகோலைப் பயன்படுத்தித் தேவையான அளவுகோலைக் கீழே விளக்கியவாறு அமைக்கலாம். பெரும்பாலான மடக்கை அளவுகோல்களில் 1 முதல் 10 முடிய உள்ள எண்களுக்குத்தான் அளவுக்குறியீடுகள் செய்யப்பட்டிருக்கும். 1 முதல் 10 முடிய உள்ள அளவுகோலின் மறுபகர்ப்பே 10 முதல் 100 முடிய, 100 முதல் 1000 முடிய 0.01 முதல் 0.1 முடிய, 0.001 முதல் 0.01 முடிய, ... உள்ள அளவுகோல்கள் என முன்பே சொல்லப்பட்டுள்ளது. எனவே, 1500 முதல் 20,000 முடிய உள்ள அளவுகோலை அமைக்க, முதற்கட்டமாக 1500 முதல் 10,000 முடியவும், இரண்டாவது கட்டமாக 10,000 முதல் 20,000 முடியவும் உள்ள அளவீடுகளுக்கு அளவுக்குறியீடுகள் செய்ய வேண்டும். 1500 முதல் 10,000 முடிய உள்ள அளவுகோல் 1.5 முதல் 10 முடிய உள்ள அளவுகோலின் மறுபகர்ப்பு ஆகும். 10,000 முதல் 20,000 முடிய உள்ள அளவுகோல் 1 முதல் 2 முடிய உள்ள அளவுகோலின் மறுபகர்ப்பு ஆகும்.

எனவே, எந்த நேர்கோட்டின்மீது அளவுகோல் அமைக்கப்பட வேண்டுமோ அந்த நேர்கோட்டின்மீது, 11.55-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலை, அதன் 1.5 என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளியானது நேர்கோட்டின் கீழ்முனையில் ஒன்றியிருக்குமாறு வைத்து, 1.5, 2, 3, ..., 10 என்ற அளவீடுகளுக்கு நேரே அளவுக்குறியீடுகள் செய்து கொள்ளவேண்டும். அதன் பிறகு 11.55-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக் கொண்ட அளவுகோலை அதன் ஒன்றுக்குறி (one mark), 10-க்கு நேரே சற்றுமுன் குறிக்கப்பட்ட அளவுக்குறியீட்டுடன் ஒன்றியிருக்குமாறு, அளவுகோல் அமைக்கப்படும் நேர்கோட்டின் மீது நகர்த்தி வைக்க வேண்டும். இப்பொழுது 1.5, 2 என்ற அளவீடுகளுக்கு நேரே அளவுக்குறியீடு செய்யவேண்டும். நேர்கோட்டின் மீது குறிக்கப்பட்ட அளவுக்குறியீடுகளே தேவையான அளவுகோலின் 1500, 2000, 3000, 10,000, 15,000, 20,000 என்ற அளவீடுகளுக்குரியனவாகும். குறித்த அளவுக்குறியீடுகளுக்கு நேரே இந்த ஒத்த அளவீடுகளை எழுதினால் தேவையான அளவுகோல் கிடைக்கும்.

11.55-ஐ அளவுகோல் குணசமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோல் கிடைக்கவில்லை எனில், படம் 18 அல்லது 19-ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது போலத் தேவையான அளவுகோலை அமைத்துக் கொள்ளலாம். $m = 10$ என்பதற்கான அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோல் கிடைக்குமாதலால் அதன் உதவியால் **AX** என்ற நிலைக்குத்துக்கோட்டின் மீது, மேலே விளக்கியபடி

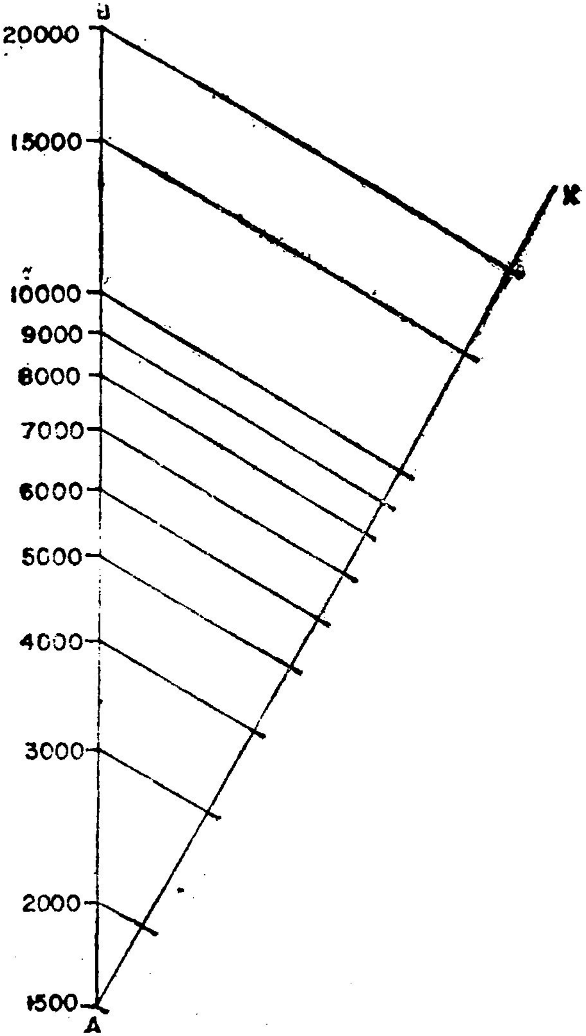


படம் 24

1500 முதல் 20,000 முடிய உள்ள அளவீடுகளுக்குப் 10-ஐ அளவு கோல் குணகமாகக் கொண்ட அளவுகோலை அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். பிறகு AX-க்குச் செங்குத்தாக, A வழியாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின்மீது B, C என்ற புள்ளிகளை AC : BC = 10 : 11.55 என்றிருக்குமாறு குறித்துக் கொள்ளவேண்டும். C ஒரு முனைப் புள்ளியாக இருக்கவேண்டும். BC > AC என்பதால், A என்ற புள்ளி B, C என்ற இரு புள்ளிகளுக்கும் இடையில் இருக்கும். AX அளவுகோலின் அளவுக்குறியீடுகளுக்கு C-யிலிருந்து நேர்கோடுகள் வரைந்து நீட்டிவிட்டால், அவை AX-க்கு இணையாக B வழியே செல்லும் கோட்டை, தேவையான அளவுகோலின் ஒத்த அளவுக் குறியீடுகளில் வெட்டும். தேவையான அளவுகோலை அமைத்த பின்னர், AX அளவுகோலோ, C வழியாகச் செல்லும் கோடுகளோ தேவையில்லை ஆதலால் அவற்றைத் துடைத்தழித்து விடலாம். AX அளவுகோல் துடைத்தழிக்கப்படவேண்டிய ஒன்றுதலால், அதை அமைக்கும்பொழுது அளவுக்குறியீடுகள் மட்டும் செய்தால் போதுமானது. அளவீடுகள் செய்து காலத்தை வீணாக்க வேண்டாம். ஆனால், அளவுக்குறியீடுகளுக்குரிய அளவீடுகளை நினைவிற் கொள்ளவேண்டும். அப்பொழுதுதான் தேவையான அளவுகோலில் தவறு ஏற்படாதவாறு அளவீடுகள் செய்யமுடியும். எளிமைக்காகவும் வசதிக்காகவும் m-ன் மதிப்பை 11.5 என எடுத்துக்கொண்டு தேவையான அளவுகோலைப் படம் 24-ல் உள்ளவாறு அமைத்துக்கொள்ளலாம். இப்படி அமைக்கப்பட்ட அளவுகோல் 13 செ.மீட்டருக்குச் சற்றுக்குறைவான நீளத்தி லேயே அடங்குவதைக் காண்க.

தேவையான அளவுகோலைச் சரியாக 13 செ.மீ. நீளத்தில் அமைக்கவேண்டுமெனில் $m = 11.55$ எனக் கொள்ளவேண்டும். இல்லையேல் இணைகோடுகள் முறை அல்லது புள்ளிவழிக் கோடுகள் முறையைப் பயன்படுத்தவேண்டும். இந்த முறைகளைப் பயன்படுத்துவதற்கு m-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கத் தேவை இல்லை. இணைகோடுகள் முறையில் அளவுகோலை இப்பொழுது அமைக்கலாம். AB என்ற 13 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோடு வரைந்து, இதற்கு வசதியான கோணத்தில் சாய்ந்திருக்குமாறு AX என்ற மற்றொரு நேர்கோட்டை வரையவேண்டும் (படம் 25). பின்னர் A என்ற புள்ளிக்கு 1500 என்ற அளவீடு இருக்குமாறு, AX-ன் மீது 1500 முதல் 20,000 முடிய உள்ள அளவீடுகளுக்கு, ஏதாவது ஓர் அளவுகோல் குணகத்தைக் கொண்ட மடக்கைக அளவுகோலை அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும். AX அளவு

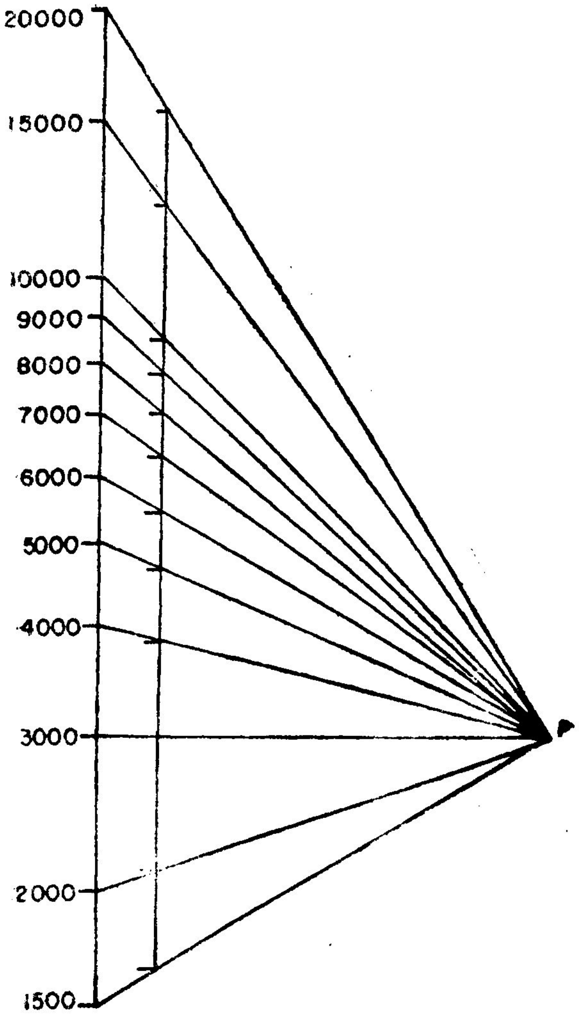
கோலின் மீதுள்ள 20,000 என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளியையும் B-ஐயும் ஒரு நேர்கோட்டால் இணைக்கவேண்டும். இந்நேர் கோட்டுக்கு இணையாக இருக்குமாறு, AX அளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகள் வழியே நேர்கோடுகள் வரைந்தால் இக்கோடுகள் AB-ஐ ஒத்த அளவுக்குறியீடுகளில் வெட்டும். AB-யின்மீது



படம் 25

அமைக்கப்பட்ட அளவுகோலே தேவையான அளவுகோல் ஆகும். இந்த அளவுகோலில் 1500, 15,000 என்ற அளவீடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை, அதாவது ஒரு சுற்றுக்குரிய நீளத்தை அளந்து பார்த்தால் 11.55 செ.மீ. எனக் காணலாம். இதுதான்

$$m = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லை வேறுபாடு}}$$



படம் 26

என்னும் வாய்பாட்டிலிருந்து, அளவுகோல் நீளம் 13 செ.மீ. எனக் கொண்டு கணக்கிடப்பட்ட m-ன் மதிப்பாகும்.

படம் 23-ல் விளக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவழிக் கோடுகள் முறையைப் பின்பற்றி எடுத்துக்காட்டு 4-க்கு அமைக்கப்பட்ட அளவுகோல் படம் 26-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

4. குறியீட்டுச் சமன்பாடும் குறியீட்டுக் குணகமும் (Plotting Equation and Plotting Modulus)

$4u+3$ என்ற u-வின் ஒரு சார்பை எடுத்துக்கொள்க. இதில் u என்னும் மாறி (Variable) 5 முதல் 10 முடிய மாறுபடுகிறது என்க. இந்தச் சார்புக்கு 10 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அளவுகோல் அமைக்கவேண்டுமெனில் அதன் அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x = m(4u+3)$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும். இங்கு x என்பது அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து u என்னும் அளவீட்டுக்குள்ள தூரத்தைக் குறிக்கிறது.

$4u+3$ என்ற சார்பின் பெருமம் $= 4(10)+3$
$= 43$

$4u+3$ என்ற சார்பின் சிறுமம் $= 4(5)+3$
$= 23$

எனவே, $4u+3$ என்ற சார்பின் எல்லைவேறுபாடு $= 43 - 23$
$= 20$

$4u+3$ என்ற சார்பில் 3 என்ற மாறிலி உறுப்புக்குப் (constant term) பதிலாக k என்ற வேறு ஏதேனும் ஒரு மாறிலி உறுப்பு இருந்தால்,

சார்பின் எல்லை வேறுபாடு $= (40+k)-(20+k)$
$= 20$

இதிலிருந்து, ஒரு சார்பின் மாறிலி உறுப்பு எதுவாயிருப்பினும், அந்தச் சார்பின் எல்லை வேறுபாடு மாறுமல் அப்படியே இருக்கும் என்பது தெரிகிறது. எனவே ஒரு சார்பின் எல்லை வேறுபாட்டைக் கணக்கிடும் பொழுது மாறிலி உறுப்பை விட்டுவிடலாம். இதனால் கணக்கீட்டுவேலை சிறிதளவு குறையும். இப்பொழுது

$$m = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லை வேறுபாடு}}$$

$$= \frac{10}{20}$$

$$= 0.5$$

எனவே, அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x = 0.5\,(4u + 3)$$

அதாவது $x = 2u + 1.5$

ஆகும். m-ன் மதிப்பைப் பதிலிட்டபின் கிடைக்கும் இந்த இறுதிச் சமன்பாட்டுக்கு அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு (plotting equation) எனப் பெயர். அளவுகோலை அமைப்பதற்கு u-வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான x-ன் மதிப்புகள் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்துதான் கணக்கிடப்படுகின்றன.

அமைக்கப்போகும் அளவுகோலின் முதற்குறிக்கான அளவீடு 5 ஆகும். எனவே, அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியானது, முதற்குறியிலிருந்து $2(5) + 1.5$ அதாவது 11.5 செ.மீ. தூரத்தில் இடது பக்கம் இருக்கும். அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கான அளவீடு -0.75 ஆகும். இது $2u + 1.5$ என்பதைச் சுழிக்குச் (zero) சமப்படுத்தினால் கிடைக்கும் u-வின் மதிப்பாகும். 1.5 என்ற மாறிலி உறுப்புக்குப் பதிலாக, எடுத்துக் காட்டாக, 15 என்ற மாறிலி உறுப்பு இருந்தால், இப்பொழுது அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியானது, 5 என்ற முதற்குறியிலிருந்து $2(5) + 15$ அதாவது 25 செ மீ. தூரத்தில் இருக்கும். இப்பொழுது அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளிக்கான அளவீடு -7.5 ஆகும். இதிலிருந்து, வெவ்வேறு மாறிலி உறுப்புகளுக்கு, தொடக்கப் புள்ளியின் இருப்பிடங்கள் வெவ்வேருக இருக்கும் என்றும், தொடக்கப்புள்ளிக்கான அளவீடுகளும் வெவ்வேருக இருக்கும் என்றும் அறியலாம்.

$$x = 2u + 1.5$$

என்ற அளவுகோலில் u_1, u_2 என்னும் அளவீடுகளுக்கிடையே

உள்ள தூரம் $= (2u_1 + 1.5) \sim (2u_2 + 1.5)$

$= 2(u_1 \sim u_2)$ செ.மீ.

குறியீட்டுச் சமன்பாட்டில் 1.5 என்ற மாறிலி உறுப்புக்குப் பதிலாக வேறு எந்த மாறிலி உறுப்பு இருந்தாலும், u_1, u_2 என்ற அளவீடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் $2(u_1 \sim u_2)$ செ.மீ. என்பதே ஆகும். இதிலிருந்து, மாறிலி உறுப்பு எதுவாயிருப்பினும் உட்பிரிவுகளுக்கிடையே உள்ள தூரங்கள் மாருது என்பதைக் காணலாம்.

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து ஓர் அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியும், தொடக்கப்புள்ளிக்கான அளவீடும் அளவுகோலின்

குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலி உறுப்பைச் சார்ந்தன என்றும், அளவுகோலின் உட்பிரிவுகளுக்கிடையே உள்ள தூரங்கள் மாறிலி உறுப்பைச் சார்ந்தன அல்ல என்றும் தெரிகிறது.

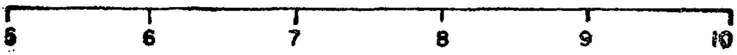
ஓர் அளவுகோலின்மீது அதன் தொடக்கப்புள்ளியைக் குறிக்க வேண்டிய கட்டாயம் இல்லை ஆதலால்

$$x = 2u + 1.5$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு அமைக்கப்படும் அளவுகோலும், மாறிலி உறுப்பை விட்டுவிட்டால் கிடைக்கக் கூடிய

$$x = 2u$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு அமைக்கப்படும் அளவுகோலும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும். இரு அளவுகோல்களிலும் u-ன் ஓர் அலகானது 2 செ.மீ. நீளத்தால் குறிக்கப்படும். எனவே, ஒரு சமன்பாட்டுக்கு அளவுகோல் அமைக்கும்பொழுது சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலி உறுப்பை விட்டுவிடலாம். 10 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர் கோட்டின்மீது, அடுத்தடுத்த இரண்டு அளவீடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் 2 செ.மீ. இருக்குமாறு 5, 6, 7, 8, 9, 10 என்ற அளவீடுகளைச் செய்தால் தேவையான அளவுகோல் கிடைக்கும் (படம் 27). இந்த அளவுகோலின் மீது u-ன் மதிப்புகளுக்குத்தான்



படம் 27

அளவுக்குறியீடுகள் செய்யப்பட்டுள்ளன; கொடுக்கப்பட்ட சார்பில் உள்ள $4u$ என்பதன் மதிப்புகளுக்கோ, குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலுள்ள $2u$ என்பதன் மதிப்புகளுக்கோ அல்ல.

$$x = 2u + 1.5$$

என்ற குறியீட்டுச் சமன்பாட்டில் u-ன் கெழு (co-efficient) 2 ஆகும். எனவேதான், இச்சமன்பாட்டுக்கு அமைத்த அளவுகோலில், 2 செ.மீ. நீளம் u-ன் ஓர் அலகைக் குறிக்கிறது. அளவுகோல் குணகமான 0.5-க்கு ஏற்ப அல்லாமல் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டில் உள்ள u-ன் கெழுவுக்கு ஏற்ப அளவுகோலின்மீது அளவுக் குறியீடுகள் செய்வதால், இக்கெழுவைக் குறியீட்டுக்குணகம் (plotting modulus) என அழைக்கலாம். இதைப் பயனுறு குணகம் (effecive modulus) எனவும் சொல்லலாம்.

$4u + 3$ என்ற சார்புக்கு அமைக்கப்பட்ட அளவுகோல் ஒரு சீர் அளவுகோல் ஆகும். இனி $3 \log u - 2.71$ என்ற சார்புக்கு அளவுகோல் அமைக்கும் முறையைக் காணலாம். u-ன் நெடுக்கத்தை 2 முதல் 8 எனக் கொள்க. மேலும், அளவுகோல் நீளத்தை வசதிக்கேற்ப எடுத்துக் கொள்க. தேவையான அளவுகோலின் அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x = m(3 \log u - 2.71)$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

$$\text{சார்பின் எல்லைவேறுபாடு} = 3 \log 8 - 3 \log 2$$
$$= 3 \log 4$$
$$= 1.8063$$

சார்பின் எல்லை வேறுபாட்டைக் கணக்கிடும்பொழுது மாறிலி உறுப்பான -2.71 என்பதை விட்டுவிடலாம் என அறிக. அளவுகோல் நீளத்தை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம் என்பதால்,

$$m = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லைவேறுபாடு}}$$

என்ற வாய்பாட்டை,

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m \times \text{சார்பின் எல்லைவேறுபாடு}$$

என்ற அமைப்பில் மாற்றிக் கொள்வது நல்லது. அளவுகோல் நீளம் ஒரு முழு எண்ணாக இருக்கத் தேவையில்லை. எனவே, அளவுகோலை எளிதாக அமைப்பதற்கேற்ப m-ன் மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். m-ன் மதிப்பை 5 எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

$$\text{எனவே, அளவுகோல் நீளம்} = 5(1.8063)$$
$$= 9.0315 \text{ செ.மீ.}$$

அளவுகோல் நீளத்தைச் சரிநுட்பமாகக் கணக்கிட வேண்டியதில்லை. அளவுகோல் நீளம், தாளின் அளவுக்குள் அடங்குகிறதா எனப் பார்த்துக்கொண்டால் போதும். m-ன் மதிப்பை அளவுகோல் சமன்பாட்டில் பதிலிட

$$x = 5(3 \log u - 2.71)$$

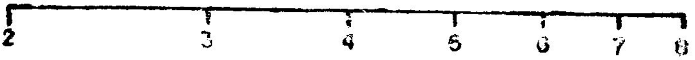
$$\text{அதாவது,} \quad x = 15 \log u - 13.55$$

என்ற குறியீட்டுச் சமன்பாடு கிடைக்கும். m-ன் மதிப்பான 5-ஐ அளவுகோல் குணகம் என்றும், குறியீட்டுச் சமன்பாட்டில் உள்ள $\log u$-ன் கெழுவான 15-ஐக் குறியீட்டுக் குணகம் என்றும் சொல்ல

வேண்டும். ஒரு சமன்பாட்டுக்கு அளவுகோல் அமைக்கும் பொழுது சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலி உறுப்பை விட்டுவிடலாம். எனவே, 2 முதல் 8 முடிய அளவீடுகள் செய்து

$$x = 15 \log u$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோலையோ மடக்கை அளவுகோல்களின் விகிதசம விளக்கப்படத்தையோ பயன்படுத்தி அளவுகோல் அமைத்தால் தேவையான அளவுகோல் கிடைக்கும் (படம் 28).



படம் 28

இதுவரை

$$x = m \log u$$

என்ற அளவுகோலை m-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோல் எனக் குறிப்பிட்டு வந்தது நினைவிருக்கலாம். $\log u$ என்ற சார்புக்கு மட்டுமல்லாமல் $3 \log u - 2.71$ போன்ற சார்புகளுக்கான அளவுகோலையும் மடக்கை அளவுகோல் என்றே சொல்லவேண்டும். எனவே, m-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோல் எனில், அது

$$x = m \log u$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய அளவுகோலைத்தான் குறிக்குமெனச் சொல்வதற்கில்லை. ஆகவே,

$$x = m \log u$$

என்ற அளவுகோலை இனிமேல் m-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோல் எனக் குறிப்பிடுவதே பொருந்தும்.

சீர் அளவுகோலையும் மடக்கை அளவுகோலையும் அடிக்கடி பயன்படுத்துவதால் $au + b$, $a \log u + b$ என்ற அமைப்பில் உள்ள சார்புகளுக்கு அமைக்கப்பட்ட அளவுகோல்களின் குறியீட்டுக் குணகம் பற்றிச் சொல்லப்பட்டன. வேறுவகையான அளவுகோல்களின் குறியீட்டுக் குணகம் பற்றித் தேவை ஏற்படும்பொழுது தெரிந்து கொள்ளலாம்.

குறைக் குறியீட்டுக் குணகம் (Negative Plotting Modulus): $60 - 4u$ என்ற u-ன் ஒரு சார்பை எடுத்துக்கொள்க. இதில்

u-ன் நெடுக்கத்தை (range) 5 முதல் 25 முடிய எனவும், அளவு கோலின் நீளத்தை 10 செ.மீ. எனவும் கொள்க. இந்தச் சார்புக்குரிய அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x = m\,(60 - 4u)$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

$u = 5$ எனில், $60 - 4u = 40$
$u = 25$ எனில், $60 - 4u = -40$

எனவே, $60 - 4u$ என்ற சார்பின் பெருமம் 40 என்றும், சிறுமம் -40 என்றும் தெரிகிறது. u-ன் குறைந்த மதிப்புக்குச் சார்பின் பெருமமும், மிகுந்த மதிப்புக்குச் சார்பின் சிறுமமும் கிடைப்பதைக் காணலாம்.

$$\text{சார்பின் எல்லை வேறுபாடு} = 40 - (-40) = 80$$

$60 - 4u$ என்ற சார்பின் எல்லைவேறுபாட்டைக் கணக்கிடும் பொழுது மாறிலி உறுப்பை விட்டுவிடலாம். மாறிலி உறுப்பை விட்டுவிட்டால் கிடைப்பது $-4u$ ஆகும். $-4u$ என்பதன் எல்லை வேறுபாடும் குறைக்குறியை (negative sign) நீக்கிவிட்டால் கிடைக்கும் $4u$ என்பதன் எல்லைவேறுபாடும் சமமாகும். எனவே, $60 - 4u$ என்ற சார்பின் எல்லைவேறுபாட்டைக்காண $4u$ என்ற சார்பின் எல்லைவேறுபாட்டைக் கணக்கிட்டாலே போதும். $4u$ என்ற சார்பின் எல்லைவேறுபாட்டைக் கணக்கிடுகையில் கூட $4(25) - 4(5)$ எனக்கணக்கிடாமல், 4 என்ற பெருக்கும் மாறிலியையும் (multiplying constant) u என்பதன் எல்லைவேறு பாட்டையும் பெருக்கி, $4(25 - 5)$ அதாவது 80 எனக் கணக்கிடலாம்.

இப்பொழுது $$m = \frac{\text{அளவுகோல் நீளம்}}{\text{சார்பின் எல்லைவேறுபாடு}}$$

$$= \frac{10}{80}$$

$$= \frac{1}{8}$$

எனவே, குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = \tfrac{1}{8}\,(60 - 4u)$$

அதாவது, $x = 7.5 - 0.5u$

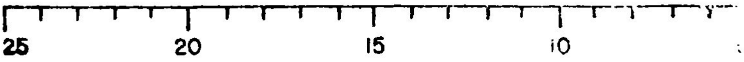
ஆகும். குறியீட்டுச் சமன்பாட்டில் u-வின் கெழு ஒரு குறைஎண் ஆதலால் குறியீட்டுக் குணகத்தைக் குறைக் குறியீட்டுக் குணகம் (negative plotting modulus) எனச் சொல்லலாம். u-வின் கெழு ஒரு மிகைஎண்ணாக இருப்பின் அளவீடுகள் எத்திசையில் கூடிக் கொண்டு செல்லுமோ, அதற்கு எதிர்த்திசையில் அந்த அளவீடுகள் u-வின் கெழு ஒரு குறை எண்ணாக இருக்கும் பொழுது கூடிக் கொண்டு செல்லும்.

$$x = 7.5 - 0.5\,u$$

என்ற அளவுகோலின் குறியீட்டுக் குணகம் —0.5 என்பதால் இந்த அளவுகோலில் 0.5 செ.மீ. நீளம் u-வின் ஓர் அலகைக் குறிக்கும் என்றும், அளவீடுகள் வலமிருந்து இடமாகக் கூடிக் கொண்டு செல்லும் என்றும் பொருளாகிறது. x-ஐ இடமிருந்து வலமாக அளக்கவேண்டும் என்பதை நினைவிற் கொள்க. எனவே,

$$x = 7.5 - 0.5\,u$$

என்ற அளவுகோலை அமைக்க, 10 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர் கோடு வரைந்து, 0.5 செ மீ. இடைவெளி இருக்குமாறு அளவுக் குறியீடுகள் செய்து வலமிருந்து இடமாக 5, 6, 7, ..., 25 என அளவீடுகள் செய்யவேண்டும். இல்லையேல் 25, 24, 23, ..., 5 என இடமிருந்து வலமாக அளவீடுகள் செய்யவேண்டும். இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட அளவுகோல் படம் 29-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 29

கூடும் சார்பும் (Increasing function) குறையும் சார்பும் (Decreasing function): u-வின் மதிப்பு கூடக்கூட $f(u)$-வின் மதிப்பும் கூடினால் $f(u)$-க்குக் கூடும் சார்பு (increasing function) எனப்பெயர். u-வின் மதிப்பு கூடக்கூட $f(u)$-வின் மதிப்பானது குறைந்து கொண்டு சென்றால் $f(u)$-க்குக் குறையும்சார்பு (decreasing function) எனப்பெயர்.

$$x = m\,f(u)$$

என்ற அளவுகோலில் எத்திசையில் x-ஆனது அளக்கப்படுகிறதோ அத்திசையில் தான் அளவுகோலை அமைப்பதாகச் சொல்லவேண்டும். $f(u)$ ஒரு கூடும் சார்பெனில் அளவுகோலை அமைக்கும்

திசையில்தான் அளவீடுகள் கூடிக்கொண்டு செல்லும். $f(u)$ ஒரு குறையும் சார்பெனில் அளவுகோலை அமைக்கும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் அளவீடுகள் கூடிக்கொண்டு செல்லும்.

$$x = 7.5 - 0.5\,u$$

என்ற அளவுகோலை இடமிருந்து வலமாக அமைப்பதாலும், $7.5 - 0.5\,u$ ஒரு குறையும் சார்பு என்பதாலும் அளவீடுகள் வலமிருந்து இடமாகக் கூடிக்கொண்டு செல்கின்றன.

அளவுகோல் குணகமும் குறியீட்டுக் குணகமும்: ஓர் அளவு கோலின் அளவுகோல் சமன்பாடும் குறியீட்டுச் சமன்பாடும் ஒரே பொருளைத்தான் உணர்த்துகின்றன. அளவுகோல் சமன் பாட்டில் m-ன் மதிப்பைப் பதிலீடு செய்து, அளவுகோலை அமைப்பதற்கேற்ப மாற்றியமைக்கப்படும் சமன்பாடே குறி யீட்டுச் சமன்பாடு எனப்படும். ஆனால், ஓர் அளவுகோலின் குணகமும் குறியீட்டுக் குணகமும் ஒரே பொருளை உணர்த்துவன அல்ல. அளவுகோல் குணகம் என்பது உருப்பெருக்கக் கூறு (enlargement factor) அல்லது உருச்சுருக்கக் கூறு (reduction factor) ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட நீளத்தில் ஓர் அளவுகோல் பொருந்தவேண்டும் என்பதற்காகப் பயன்படுத்தப்படும் எண்ணே அளவுகோல் குணகம் ஆகும். இது எப்பொழுதும் ஒரு மிகை எண்ணாகவே இருக்கும். மேலும் குறை உருப்பெருக்கம் (negative enlargement) என்பதற்கோ, குறை உருச்சுருக்கம் (negative reduction) என்பதற்கோ எந்தவிதப் பொருளும் இல்லை. அளவுகோல் குணகத்தையும் கொடுக்கப்பட்ட சார்பில் உள்ள u, $\log u$, u^2, u^3, $\sqrt{u}$, $\frac{1}{u}$ போன்றவற்றின் கெழுவையும் பெருக்கக் கிடைப்பது குறியீட்டுக் குணகம் ஆகும். சார்பைப் பொறுத்துக் குறியீட்டுக் குணகம் ஒரு மிகை எண்ணாகவோ அல்லது ஒரு குறை எண்ணாகவோ இருக்கலாம்.

நேபவரையங்கள் அமைக்கும்பொழுது அளவுகோல்களின் இருப்பிடத்தைக் காண அளவுகோல் குணகமும், அளவுகோல் களின் மீது அளவுக்குறியீடுகள் செய்யக் குறியீட்டுக் குணகமும் பயன்படுகின்றன.

5. அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் (Adjacent Scales)

இதுவரை சார்பு அளவுகோல்கள் வேறு சார்பு அளவுகோல் களோடு தொடர்புகொள்ளாத வகையில் தனித்தனியாக அமைக்கப் பட்டன. அளவுகோல்களைத் தனித்தனியாக அமைப்பதால் ஓரிரு பயன்களே உண்டு. இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட

சார்பு அளவுகோல்களை, அவைகளுக்குள் ஒரு தொடர்பு இருக்குமாறு அருகருகே வைத்தால் இன்னும் சில பயன்களை எதிர்பார்க்கலாம்.

u, v என்ற இரு மாறிகளுக்குள்ள தொடர்பு,

$$f_1(u) = f_2(v)$$

என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின், இச்சமன்பாட்டுக்கு இயற்கணித முறைகளில் (algebraic methods) தீர்வு (solution) காணலாம். வரைபட முறைகளிலும் இச்சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காணலாம்.

u, v-அளவுகோல்களை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது பக்கத்திற்கு ஒன்ருக (நிலைக்குத்துக் கோடாயின் இடது பக்கம் ஒன்றும் வலது பக்கம் ஒன்றுமாக, கிடைக்கோடாயின் மேற் பக்கம் ஒன்றும் கீழ்ப்பக்கம் ஒன்றுமாக) u, v என்பவற்றின் ஒத்த மதிப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று நேரெதிரே இருக்குமாறு அமைத்தால், ஒரு மாறியின் மதிப்பிலிருந்து அதற்கு ஒத்த மற்ருெரு மாறியின் மதிப்பை உடனே காணலாம். இவ்வாறு ஒரு நேர்கோட்டின் மீது பக்கத்திற்கு ஒன்ருக அமைக்கப்பட்ட அளவுகோல்களுக்கு அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் (adjacent scales) எனப் பெயர்.

$$f_1(u) = f_2(v)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு, அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமைக்கும் முறையை இப்பொழுது காணலாம். u, v—அளவு கோல்களின் சமன்பாடுகளை முறையே

$$x = m_1 \, f_1(u)$$
$$y = m_2 \, f_2(v)$$

எனக்கொள்க. x என்பது u-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கும் u என்னும் அளவீட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் ஆகும். y என்பது v-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளிக்கும் v என்னும் அளவீட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் ஆகும். u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கான அளவீடுகளை முறையே u_0, v_0 எனக் கொண்டால்,

$$f_1(u_0) = 0$$
$$f_2(v_0) = 0$$

$$\text{எனவே,} \quad f_1(u_0) = f_2(v_0)$$

இதிலிருந்து u_0, v_0 என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவுசெய்யும் (satisfying) வகையில் உள்ள u, v இவற்றின் மதிப்புகள் எனத் தெரிகிறது. ஒத்த மதிப்புகள், அளவுகோல்கள்

அமைக்கப்படும் நேர்கோட்டின்மீது ஒன்றுக்கொன்று நேரெதிரே இருக்கும் ஆதலால் u_0, v_0 என்ற அளவீடுகளுக்கான புள்ளிகள் ஒன்றியிருக்கும் எனத் தெரிகிறது. இதேபோல்

$$f_1 (u) = f_2 (v)$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவுசெய்யும் வகையில் உள்ள u, v என்ற அளவீடுகளுக்கான புள்ளிகளும் ஒன்றியிருக்கும். எனவே, u_0, u என்ற அளவீடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரமும் v_0, v என்ற அளவீடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரமும் சமமாகும். எனவே $x = y$. ஆகவே அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1 (u)$$
$$x = m_2 f_2 (v)$$

எனக் கொள்ளலாம்.

$$f_1 (u) = f_2 (v)$$

என்பதால் $m_1 = m_2$. எனவே அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m f_1 (u)$$
$$x = m f_2 (v)$$

எனக் கொண்டு, u, v - அளவுகோல்களை அமைத்தால் தேவையான அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் கிடைக்கும். u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டும் ஒரே அளவுகோல் குணகத்தைக் கொண்டுள்ளன என்பதை நினைவிற் கொள்க.

செல்சியஸ் (Celsius) வெப்பநிலை அளவுக்கும், ஃபாரன்ஹீட்டு (Fahrenheit) வெப்பநிலை அளவுக்கும் உள்ள தொடர்பினை

$$F = 1.8\,C + 32$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து அறியலாம். இச்சமன்பாட்டில் உள்ள இரண்டு மாறிகள் F, C என்பனவாகும். இச்சமன்பாட்டுக்குக் கீழ்க்கண்டவாறு அடுத்துள்ள அளவுகோல்களை அமைக்க வேண்டும். C-ன் மதிப்பு 0 முதல் 100 முடிய மாறுபடுவதாகக் கொள்க. எனவே, F-ன் மதிப்பு 32 முதல் 212 முடிய மாறுபடும். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

F - அளவுகோலுக்கு $x = m\,F$ என்றும்

C - அளவுகோலுக்கு $x = m\,(1.8\,C + 32)$ என்றும்

கொள்க. m-ன் மதிப்பை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம்.

F-ன் சமன்பாட்டிலிருந்து அளவுகோல் நீளம்

$$= m\,(212 - 32)$$
$$= 180\,m$$

$m = 0.05$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே, அளவு கோல் நீளம் 9 செ.மீ. ஆகிறது. m-ன் இதே மதிப்பைத்தான் C-அளவுகோலுக்கும் பயன்படுத்தவேண்டும். அளவுகோல்களை எளிதாக அமைப்பதற்கேற்ற குறியீட்டுக் குணகம் கிடைக்குமாறு m-ன் மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். $m = \frac{1}{18}$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொண்டு 10 செ.மீ. நீளத்தில் அளவு கோலை அமைப்பதைவிட, $m = 0.05$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டு 9 செ.மீ. நீளத்தில் அளவுகோலை அமைப்பதே எளியது. இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

F- அளவுகோலுக்கு, $x = 0.05\,F$

C- அளவுகோலுக்கு, $x = 0.05\,(1.8\,C + 32)$

அதாவது $x = 0.09\,C + 1.6$

ஆகும். இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளையும்

$$0.05\,F = x = 0.09\,C + 1.6$$

என்ற அமைப்பிலும் எழுதலாம்.

F, C-அளவுகோல்கள் இரண்டும் சீர் அளவுகோல்களே ஆகும். F-அளவுகோலில் 0.05 செ.மீ. நீளம் ஒரு வெப்பநிலைப் பாகையையும், C- அளவுகோலில் 0.09 செ.மீ. நீளம் ஒரு பாகையையும் குறிக்கின்றன. F-அளவுகோலில் 0.5 செ.மீ. நீளம் 10 பாகைகளையும் C- அளவுகோலில் 0.9 செ.மீ. நீளம் 10 பாகைகளையும் குறிக்கின்றன என்றும் கூறலாம்.

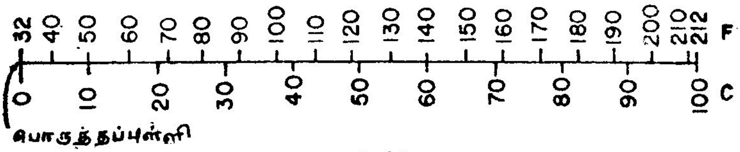
F-அளவுகோலை 9 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டின்மீது முதலில் அமைக்கவேண்டும் (படம் 30). 32 என்ற அளவீடு நேர் கோட்டின் இடது முனையிலும், 212 என்ற அளவீடு வலது முனையிலும் இருக்கும். இந்த அளவுகோலில் 32, 40, 50, 60, ... 210, 212 என்ற அளவீடுகளைச் செய்தால் போதுமானது.

பிறகு F, C இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று நேரெதிரே இருக்குமாறு, C-அளவுகோலை F-அளவுகோல் அமைக்கப்பட்ட அதே நேர்கோட்டின் மறுபக்கத்தின்மீது அமைக்க வேண்டும். இதற்கு

$$F = 1.8\,C + 32$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவுசெய்யும் வகையில் $F = 32$, $C = 0$ போன்ற F, C இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியைத் (set) தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். பின்னர் F-அளவுகோல் அமைக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் மறுபக்கத்தில்,

F = 32 என்ற புள்ளிக்கு நேர் எதிரே, அதாவது F-அளவு கோலின் 32 என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளிக்கு நேர் எதிரே 0 (சுழி) என அளவீடு செய்யவேண்டும். இதுவே C-அளவுகோலை



படம் 30

அமைப்பதன் முதற்கட்டமாகும். அதன் பிறகு, C-அளவுகோலில் 0.9 செ. மீ. நீளம் 10 பாகைகளைக் குறிக்கும் என்பதை நினைவிற் கொண்டு 10, 20, 30, ..., 100 என்ற அளவீடுகளுக்கான அளவுக் குறியீடுகளைச் செய்து C-அளவுகோலை அமைத்து முடிக்க வேண்டும். இவ்வாறு F, C-அளவுகோல்களை ஒரு நேர்கோட்டின் இரு பக்கங்களிலும் அமைத்தால் தேவையான அடுத்துள்ள அளவு கோல்கள் கிடைக்கும்.

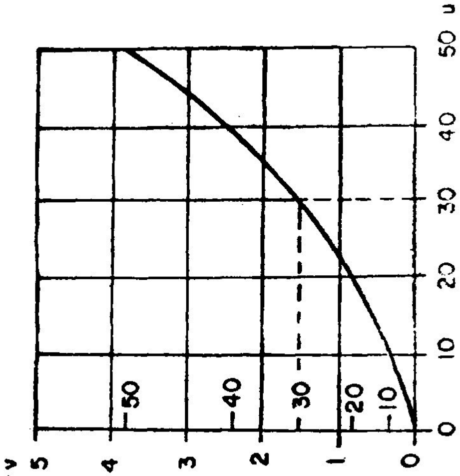
F, C-அளவுகோல்கள் இரண்டையும் பொருத்துவதற்கு F=32, C=0 என்ற புள்ளி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது அல்லவா? இப் புள்ளிக்குப் பொருத்தப் புள்ளி (matching point) எனப் பெயர். அளவுகோல்களைப் பொருத்துவதற்குப் பொருத்தப் புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுப்பது மிக இன்றியமையாததாகும். சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள F, C மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளி எதை வேண்டுமானாலும் பொருத்தப் புள்ளியாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். எடுத்துக்காட்டாக, F= 50, C = 10 என்ற புள்ளியையோ, F=140, C =60 என்ற புள்ளியையோ பொருத்தப் புள்ளியாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். F=140, C = 60 என்ற புள்ளியைப் பொருத்தப் புள்ளியாக எடுத்துக்கொண்டால், C-அளவுகோலில் 60 என்ற அளவீட்டுக்குத்தான் முதலில் அளவுக்குறியீடு செய்யப்படும். பிறகு C-அளவுகோலை அமைத்து முடிக்க C = 60 என்ற புள்ளிக்கு இடப் பக்கத்தில் உள்ள பகுதியிலும் வலப் பக்கத்தில் உள்ள பகுதியிலும் நேர்கோட்டின்மீது தேவையான அளவுக்குறியீடுகள் செய்யவேண்டும்.

அடுத்துள்ள அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகள் ஒன்றியிருக்கும் எனச் சொல்லப்பட்டது. F-அளவுகோலில் 32 என்ற அளவீடு F-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து (0.05) (32(அதாவது 1.6 செ. மீ. தூரத்தில் வலப் பக்கத்தில் உள்ளது. C-அளவுகோலில், F = 32 என்பதற்கொத்த 0 என்ற அளவீடு C-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து (0.09) 0 + 1.6 அதாவது 1.6 செ.மீ. தூரத்தில் வலப் பக்கத்தில் உள்ளது. இதிலிருந்து F, C-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகள் ஒன்றியிருக்கும்

என்றும் பொதுவான (common) இப்புள்ளி F = 32, C = 0 என்ற புள்ளிக்கு இடப் பக்கம் *1.6* செ. மீ. தூரத்தில் உள்ளதென்றும் தெளிவாகும்.

வரைபடத்திலிருந்து (Graph) **அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் :** *u, v* என்ற மாறிகளுக்குள்ள தொடர்பு ஒரு சமன்பாட்டின் அமைப்பில் கிடைக்காமல் ஒரு வரைபடத்தின் அமைப்பில் கிடைக்கக்கூடும். மேலும் இவ்வரைபடத்திலிருந்து *u, v* இவைகளுக்குள்ள தொடர்பினைச் சமன்பாட்டின் அமைப்பில் கூற இயலாமல் போகலாம். இந்நிலையில் வரைபடத்திலிருந்து *u, v* இவைகளுக்கு அடுத்துள்ள அளவுகோல்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

வரைபடத்தில் (படம் *31*) *u*-வின் மதிப்புகள் X-அச்சின் (x-axis) மீதும் அதாவது கிடை அச்சின் (horizontal axis) மீதும், *v*-யின் மதிப்புகள் Y-அச்சின் (Y-axis) அதாவது நிலைக்குத்து அச்சின் (vertical axis) மீதும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்க. வரைபடத்தில் *u, v* இவற்றிற்குள்ள தொடர்பை ஒரு வளைகோடு (curve) காண்பிப்பதாகக் கொள்க. இவற்றிற்குள்ள தொடர்பு ஒரு



படம் 31

நேர்கோட்டால் காண்பிக்கப்பட்டால் *u, v* இவற்றிற்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு (linear relation) இருப்பதாகப் பொருளாகிறது. எனவே *u, v* இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பை *u, v* என்னும் மாறிகளைக் கொண்ட ஒருபடிச் சமன்பாட்டால் (linear equation) தெரிவிக்கலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட வரைபடத்தில், u-வின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கான நிலைக்குத்துக் கோடுகளை வரைய வேண்டும். இக்கோடுகள் வரைபடத்திலுள்ள வளைகோட்டை எந்தப் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றனவோ அந்தப் புள்ளிகள் வழியாகக் கிடைக் கோடுகள் வரைந்தால், இக்கிடைக்கோடுகள் Y-அச்சைப் பல்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டும். இந்தப் புள்ளிகளுக்கு u-வின் ஒத்த மதிப்புகளை அளவீடு செய்யவேண்டும். இவ்வாறு செய்வதால் Y-அச்சின் மீது u-அளவுகோல் ஒன்று கிடைக்கிறது. Y-அச்சின் மீது முன்பே v-அளவுகோல் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, Y-அச்சின் மீது u, v-இவைகளுக்கு அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் கிடைக்கின்றன. u, v-அளவுகோல்களை X-அச்சின் மீது வேண்டுமானாலும் அமைத்துக் கொள்ளலாம். இதற்கு முதலில் கிடைக்கோடுகளையும் பின்னர் நிலைக்குத்துக்கோடுகளையும் வரையவேண்டும்.

u, v என்ற மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பானது சமன்பாட்டின் அமைப்பில் கிடைத்தாலும், அத்தொடர்பினைக் காட்டும் வரைபடத்தை வரைந்து பின்னர் மேற்கூறிய முறையில் அடுத்துள்ள அளவுகோல்களை அமைக்கலாம். இப்படிச் செய்வதைக்காட்டிலும் அளவுகோல் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி அடுத்துள்ள அளவுகோல்களை எளிதில் அமைக்கலாம்.

u, v என்ற மாறிகளுக்குள்ள ஒத்த மதிப்புகள் அட்டவணை அமைப்பில் கிடைக்கக்கூடும். இவ்வட்டவணையிலிருந்து u, v இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பை ஒரு சமன்பாட்டின் அமைப்பில் கூறமுடியாதவாறும் இருக்கும். இந்நிலையில் u, v இவைகளுக்கு அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமைக்கவேண்டுமெனில், முதலில் u, v இவைகளுக்குள்ள வரைபடம் வரைந்து பின்னர் படம் 31-இல் விளக்கிக் காட்டியபடி செய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

வட்டத்தின் (circle) விட்டம் (diameter) 100 முதல் 500 செ.மீ. முடிய மாறுபடும்பொழுது வட்டத்தின் பரப்பினைக் கண்டு பிடிப்பதற்கு ஏற்ப அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமை.

வட்டத்தின் விட்டத்தை D என்ற எழுத்தாலும், பரப்பை A என்ற எழுத்தாலும் குறித்துக்கொள்க. எனவே,

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

A-என்ற மாறிக்குச் சீர் அளவுகோலைப் பயன்படுத்தினால் D என்ற மாறிக்கு இருபடி அளவுகோலைப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு மடக்கை அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்துதல் நல்லது. எனவே இச்சமன்பாட்டை மடக்கை அமைப்பில்

$$\log A = \log\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \log D$$

என மாற்றி எழுதிக்கொள்க.

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

A-க்கு $x = m \log A$

D-க்கு $x = m [\log (\pi/4) + 2 \log D]$

எனக்கொள்க. அளவுகோல்களை எளிதாக அமைப்பதற்கேற்ப குறியீட்டுக் குணகங்கள் கிடைக்குமாறு m-இன் மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். அதே நேரத்தில் அளவுகோல் நீளம் தாளின் அளவுக்குள் அடங்குமாறு பார்த்துக்கொள்ள வேண்டும்.

D-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= m\,(2 \log 500 - 2 \log 100)$

$= 2\, m \log 5$

$= 1.398\, m$

$m = 10$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே A-அளவுகோலின் குறியீட்டுக் குணகம் 10 ஆகும். D-அளவுகோலின் குறியீட்டுக் குணகம் 20 ஆகும். இக் குறியீட்டுக் குணகங்களுக்கான அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோல்கள் கிடைக்கக்கூடியன ஆதலால் A, D-அளவுகோல்களை அமைப்பது எளிது. இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

A-க்கு $x = 10 \log A$

D-க்கு $x = 10 [\log (\pi/4) + 2 \log D]$

அதாவது $x = 20 \log D + 10 \log 0.7854$

அதாவது $x = 20 \log D + 10\,(\bar{1}.8951)$

அதாவது $x = 20 \log D - 1.049$

ஆகும். ஓர் அளவுகோலை அமைக்கும்பொழுது மாறிலி உறுப்பை விட்டுவிடலாம். எனவே D-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிலி உறுப்பின் மதிப்பை -1.049 எனக் கணக்கிடாமல் $10 \log \left(\frac{\pi}{4}\right)$ என்றே வைத்துக்கொள்ளலாம்.

20-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி D-அளவுகோலை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது முதலில் அமைக்கவேண்டும். இதில் 100 முதல் 500 முடிய அளவீடுகள் செய்யவேண்டும் (படம் 32) 100-க்கும் 500-க்கும் இடையேயுள்ள தூரம் சரியாக 13.98 செ.மீ. இருக்கும்.

பிறகு பொருத்தப் புள்ளியைத் (matching point) தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். $D = 100$ எனில் $A = 7854$. எனவே A-அளவுகோலை அமைப்பதன் முதற்கட்டமாக, $D = 100$ என்ற புள்ளிக்கு நேர் எதிரே D-அளவுகோல் அமைக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் மறுபக்கத்தில் 7854 என அளவீடு செய்யவேண்டும். பின்னர் A-அளவுகோல் அமைக்கப்படவேண்டிய நேர்கோட்டின் மீது, 10-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலை அதன் 7.854 என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளியானது, பொருத்தப் புள்ளியில் ஒன்றியிருக்குமாறு வைத்து 8, 9, 10 என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறிக்கவேண்டும். இவை A-அளவுகோலின் 8000, 9000, 10,000 என்ற அளவீடுகளைக் குறிக்கும்.

பின்னர் எடுத்துக்காட்டு 4-இல் விளக்கியவாறு A-அளவுகோலை ஒவ்வொரு சுற்றுக (cycle) அமைக்கவேண்டும். அமைத்து முடிக்கப்பட்ட அடுத்துள்ள அளவுகோல்களில் இரண்டு அளவுகோல்களும் ஒரே தொடக்கப்புள்ளியைக் கொண்டிருக்கும்.

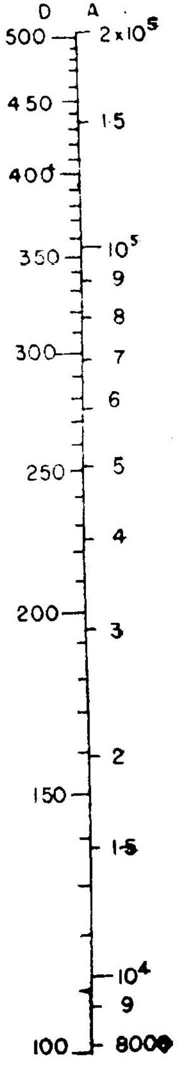
$$D = 100 \text{ எனில் } x = 20 \log 100 - 1.049$$
$$= 38.951$$

எனவே $D = 100$, $A = 7854$ என்ற புள்ளியானது, அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிக்கு மேலே 38.951 செ.மீ. தூரத்தில் இருக்கும். D அல்லது A-அளவுகோலில் உள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் $D = 100$, $A = 7854$ என்ற புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடவேண்டுமெனில், D அல்லது A-அளவுகோலில் உள்ள அந்தப் புள்ளிக்கான அளவீட்டுக்குக் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட x-இன் மதிப்பிலிருந்து

38.951 செ.மீ. நீளத்தைக் கழிக்கவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, A = 10^4 என்ற புள்ளிக்கும் A = 7854 என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம்

$$= 10 \log 10^4 - 38.951$$
$$= 1.049 \text{ செ.மீ.}$$

எனவே A-அளவுகோல் அமைக்கப்படவேண்டிய நேர்கோட்டின்மீது, D = 100, A = 7854 என்ற புள்ளிக்கு மேலே 1.049 செ.மீ. தூரத்தில் இருக்குமாறு ஒரு புள்ளியைக் குறித்து இதற்கு 10^4 என அளவீடு செய்து, அதன் பிறகு A = 10^4 என்ற புள்ளிக்கு மேல் உள்ள பகுதியிலும் கீழ் உள்ள பகுதியிலும் நேர்கோட்டின்மீது தேவையான அளவுக்குறியீடுகளைச் செய்தும் A-அளவுகோலை அமைத்து முடிக்கலாம்.



படம் 32

குறிப்பு :- D-யின் மதிப்பு 0 முதல் 500 முடிய மாறுபடுமானால் மடக்கை அளவுகோலைப் பயன்படுத்த முடியாது. ஏனெனில் சுழிக்குறி மடக்கை அளவுகோலில் இடம் பெருது. இம்மாதிரிக் கணக்கில் A-க்குச் சீர் அளவுகோலையும் D-க்கு இருபடி அளவுகோலையும் பயன்படுத்துவதைத் தவிர வேறு வழி இல்லை. D-யின் கீழ் எல்லை, சுழியைத்தவிர வேறு எந்த மிகை எண்ணாக இருப்பினும் மடக்கை அளவுகோலைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6

$3v = 400 - 8u$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமை. u-வின் நெடுக்கம் (0-20).

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

v-க்கு $x = m(3v)$

u-க்கு $x = m(400 - 8u)$

எனக்கொள்க.

$400 - 8u$ என்ற சார்பின் எல்லை வேறுபாடு

$$= 8(20 - 0)$$
$$= 160$$

எனவே u-வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m\,(160)$$

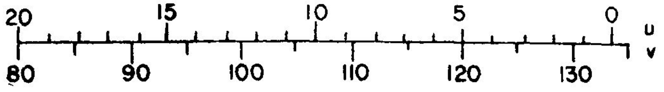
$m = \frac{1}{20}$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$v\text{-க்கு } x = 0.15v$$

$$u\text{-க்கு } x = 20 - 0.4u$$

ஆகும். u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டும் சீர் அளவுகோல்கள் ஆகும். u-அளவுகோலின்மீது 0.4 செ.மீ. நீளம் u-வின் ஓர் அலகைக் குறிக்கும். $20 - 0.4u$ ஒரு குறையும் சார்பாதலால் u-அளவுகோலின்மீது அளவீடுகள் வலமிருந்து இடமாகக் கூடிக் கொண்டு செல்லும். 0 முதல் 20 முடிய அளவீடுகள் செய்து u-அளவுகோலை அமைத்து முடித்ததும் (படம் 33) பொருத்தப் புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். $u = 20$ எனில் $v = 80$. எனவே v-அளவுகோலை அமைப்பதன் முதற்கட்டமாக $u = 20$ என்ற புள்ளிக்கு நேர் எதிரே u-அளவுகோல் அமைக்கப் பட்ட நேர்கோட்டின் மறுபக்கத்தில் 80 என அளவீடு செய்ய



படம் 33

வேண்டும். பின்னர் 0.15 செ.மீ. நீளம் v-யின் ஓர் அலகைக் குறிக்கும் என்பதை நினைவிற் கொண்டு அளவீடுகள் இடமிருந்து வலமாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லுமாறு v-அளவுகோலின்மீது அளவீடுகள் செய்யின் தேவையான அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 7

$u = \cos v$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமை. v-யின் நெடுக்கம் 0° முதல் 90° முடிய எனக் கொள்க.

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m\,u$$

$$x = m \cos v$$

எனக் கொள்க.

v-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m(\cos 0^\circ - \cos 90^\circ)$$
$$= m(1 - 0)$$
$$= m$$

$m = 10$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 10\,u$$
$$x = 10 \cos v$$

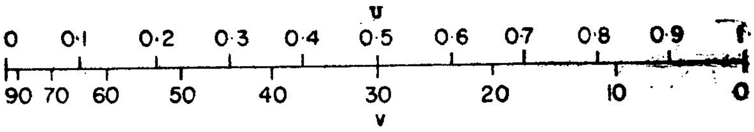
ஆகும். v-அளவுகோலை அமைக்க, அட்டவணை 2-இல் உள்ளபடி v-யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான x-இன் மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுக்கொள்ளவேண்டும். கோணகணிதப் பட்டியல்களில் (trigonometric tables) cos v-யின் மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

அட்டவணை 2

v (பாகை)	cos v	10 cos v
0	1 0000	10.000
10	0.9848	9.848
20	0.9397	9.397
30	0.8660	8.660
40	0.7660	7.660
50	0.6428	6.428
60	0.5000	5.000
70	0 3420	3.420
80	0.1736	1.736
90	0	0

v-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளிக்கான அளவீடு 90 ஆகும். எனவே அட்டவணை 2-இன் இறுதி நிரலில் உள்ள எண்கள் 90 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைச் செ. மீட்டரில் குறிக்கின்றன. 0° முதல் 90° முடிய உள்ள இடைவெளியில் cos v ஒரு குறையும் சார்பாதலால், v-அளவுகோலின்மீது அளவீடுகள் வலமிருந்து இடமாகக் கூடிக் கொண்டு செல்லும். செ.மீ., மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்டு நடைமுறையில் உள்ள சீர் அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி மேலே உள்ள

அட்டவணையின் இறுதி நிரலில் உள்ள தூரங்களுக்குரிய புள்ளிகளை 10 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டின் மீது குறித்து அவைகளுக்கு ஒத்த v-மதிப்புகளை அளவீடு செய்தால் v-அளவுகோல் கிடைக்கும் (படம் 34).



படம் 34

$v = 90$, $u = 0$ என்ற புள்ளியைப் பொருத்தப் புள்ளியாகக் கொள்ளலாம். $v = 90$ என்ற புள்ளிக்கு நேர் எதிரே u-அளவுகோல் அமைக்கப்படவேண்டிய பக்கத்தில் $u = 0$ என அளவீடு செய்து பின்னர் ஒரு செ.மீ. நீளம் u-வின் 0.1 அலகைக் குறிக்குமாறும் அளவீடுகள் இடமிருந்து வலமாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லுமாறும் அளவீடுகள் செய்தால் தேவையான அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 8

$f = \frac{0.049}{(Re)^{0.2}}$ என்னும் வாய்பாடு இழைவான (smooth) குழாய்களின் உராய்வுக் கூற்றினைக் (friction factor) கொடுக்கிறது.
இங்கு f = உராய்வுக் கூறு

Re = ரெனல்டின் எண் (Reynold's number), (5000 — 200,000).

இவ்வாய்பாட்டுக்கு அடுத்துள்ள அளவுகோல்களைக் கொண்ட விளக்கப்படம் ஒன்றை அமை.

$$f = \frac{0.049}{(Re)^{0.2}}$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மடக்கை அமைப்பில்

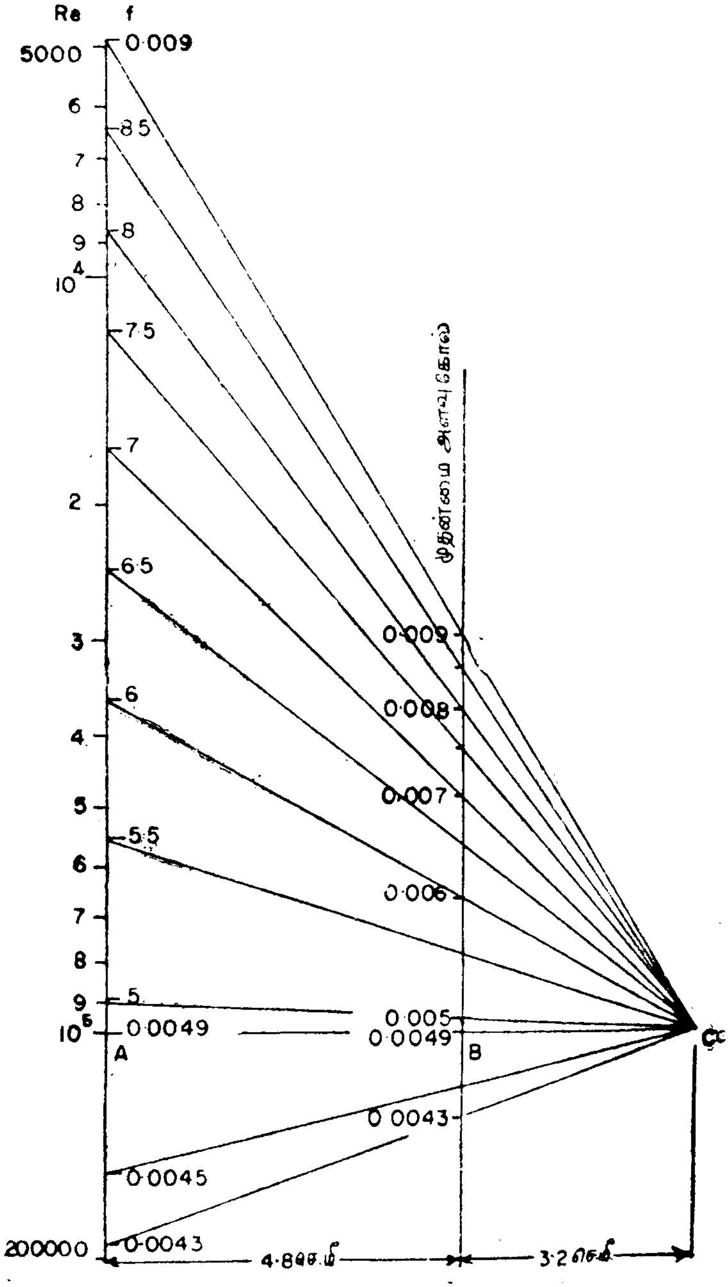
$$\log f = \log 0.049 - 0.2 \log Re$$

என எழுதிக் கொள்க. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

f-க்கு $x = m \log f$

Re-க்கு $x = m [\log 0.049 - 0.2 \log Re]$

எனக் கொள்க.


Re
f
5000
0·009
6
·85
7
8
9
·8
10^4
·75
·7
2
·65
3
·6
4
5
·55
6
7
8
9
·5
10^5
0·0049
A
முதன்மை அளவுகோல்
0·009
0·008
0·007
0·006
0·005
0·0049
B
0·0043
C
0·0045
200000
0·0043
4·8 செ.மீ
3·2 செ.மீ

படம் 35

Re-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m\,(0.2)\,[\log 200{,}000 - \log 5000]$$

$$= 0.2\,m \log 40$$

$$= 0.32042\,m$$

வசதிக்காக $m = 50$ எனக் கொள்க. எனவே அளவுகோலின் நீளம் 16.021 செ.மீ. ஆகும். இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

f-க்கு $x = 50 \log f$

Re-க்கு $x = 50\,[\log 0.049 - 0.2 \log \text{Re}]$

அதாவது $x = 50\,[\log \bar{2}.6902 - 0.2 \log \text{Re}]$

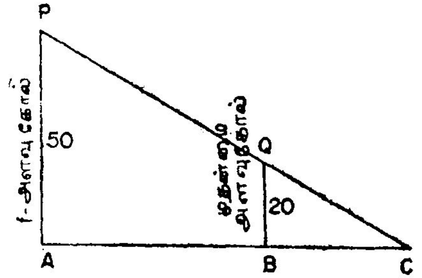
அதாவது $x = 50\,[-1.3098 - 0.2 \log \text{Re}]$

அதாவது $x = -10 \log \text{Re} - 65.49$

ஆகும். Re-அளவுகோலை எளிதில் அமைத்துவிடலாம். இதன் குறியீட்டுக் குணகம் -10 ஆகும். எனவே Re-அளவுகோலை, 10-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி, அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழாகக் கூடிக் கொண்டு செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும். Re-அளவுகோலில் 5000 முதல் 200,000 முடிய அளவீடுகள் செய்யவேண்டும் (படம் 35).

Re $= 10^5$, $f = 0.0049$ என்ற பொருத்தப் புள்ளியைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். f-அளவுகோலை அமைப்பதன் முதற்கட்டமாக, Re $= 10^5$ என்பதற்கு நேர்எதிரே f-அளவு கோலுக்குரிய பக்கத்தில் 0.0049 என அளவீடு செய்யவேண்டும். 50-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோல் கிடைக்காததலால் விகிதசம விளக்கப்பட முறையைப் பயன்படுத்தி f-அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். f-அளவு கோலை அமைப்பதற்கேற்பப் படம் 36-இல் காட்டியவாறு ஓர் உதவிப்படம் வரைந்து கொள்வது நன்று. 20-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலை முதன்மை அளவு கோலாகக் கொண்டு f-அளவுகோலை அமைக்கலாம். BQ-வின் மீது முதன்மை அளவுகோலும் AP-யின்மீது f-அளவுகோலும் அமைந்தால் AC : BC $= 50 : 20$. எனவே AC $= 8$ செ.மீ., BC $= 3.2$ செ.மீ. என எடுத்துக் கொள்க. $f = 0.0049$ என்ற புள்ளியையும், முதன்மை அளவுகோலின் 0.0049 என்ற புள்ளியையும் முறையே A, B எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

பின்னர் f-அளவுகோலை அதன்மீது அளவீடுகள் கீழிருந்து மேலாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லுமாறு படம் 35-இல் விளக்கிக்



படம் 36

காட்டியபடி அமைக்கவேண்டும். f-அளவுகோலை அமைத்து முடித்ததும் Re, f-அளவுகோல்களைத் தவிர, தேவையற்ற கோடுகளைத் துடைத்தழித்துவிடலாம்.

$$Re = 2\,(10)^5 \text{ எனில் } x = -10 \log 200{,}000 - 65.49$$
$$= -118.5$$

எனவே அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியானது $Re = 2(10)^5$ என்ற புள்ளிக்கு மேலே 118.5 செ.மீ. தூரத்தில் இருக்கும். Re அல்லது f-அளவுகோலில் உள்ள ஒரு புள்ளிக்கும் $Re = 2(10)^5$ என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தைக் காண, Re அல்லது f-அளவுகோலில் உள்ள அந்தப் புள்ளிக்கான அளவீட்டுக்குக் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட x-இன் மதிப்பிலிருந்து — 118.5 செ.மீ. நீளத்தைக் கழிக்கவேண்டும். அதாவது கணக்கிடப்பட்ட x-இன் மதிப்புடன் 118.5 செ.மீ. நீளத்தைக் கூட்டவேண்டும் எடுத்துக்காட்டாக $f = 0.005$ என்ற புள்ளிக்கும் $Re = 2(10)^5$ என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம்

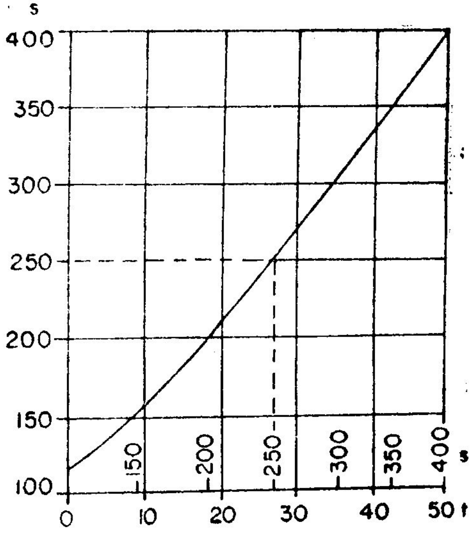
$$50 \log 0.005 + 118.5$$
$$= 50\,(\bar{3}.6990) + 118.5$$
$$= 50\,(-2.3010) + 118.5$$
$$= 3.45 \text{ செ.மீ.}$$

எடுத்துக்காட்டு 9

வெவ்வேறு வெப்பநிலைகளில் வெள்ளி நைட்ரேட்டின் (silver nitrate) கரைதிறனைச் (solubility) சோதனை (experiment) செய்து கண்டுபிடிக்கும்பொழுது கீழ்க் கண்ட அட்டவணையில்

உள்ளபடி மதிப்புகள் கிடைத்துள்ளன. இவ்வட்டவணையிலிருந்து கரைதிறனுக்கும் வெப்பநிலைக்கும் உள்ள தொடர்பினைக் காட்டும் அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமை.

வெப்பநிலை (t) ...	0	10	20	30	40	50
கரைதிறன் (s) கிராம்/100 கிராம் நீர் ...	115	160	215	270	335	400



படம் 37

வெப்பநிலையைக் கிடைஅச்சின்மீதும் கரைதிறனை நிலைக்குத்து அச்சின்மீதும் குறித்துக்கொள்க. அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள t, s இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளுக்கான புள்ளிகளைக் குறித்து இப்புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு (smooth curve) வரைக (படம் 37). s-இன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கான கிடைக்கோடுகள் வரைந்து, இக்கிடைக்கோடுகள் வளைகோட்டை வெட்டுகின்ற புள்ளிகள் வழியாக நிலைக்குத்துக் கோடுகள் வரையவேண்டும். இந்நிலைக்குத்துக் கோடுகள் கிடை அச்சை வெட்டும் இடங்களில் s-இன் ஒத்த மதிப்புகளைக் கிடை அச்சின் மேற்பக்கமாக எழுதின் தேவையான அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் கிடைக்கும்.

6. இணையளவுகோல் அளவுமாற்ற விளக்கப்படங்கள் (Parallel Scale Conversion Chart)

$$f_1(u) = f_2(v)$$

என்ற சமன்பாட்டில் ஒருமாறியின் மதிப்புக்கு ஒத்த மற்றொரு-

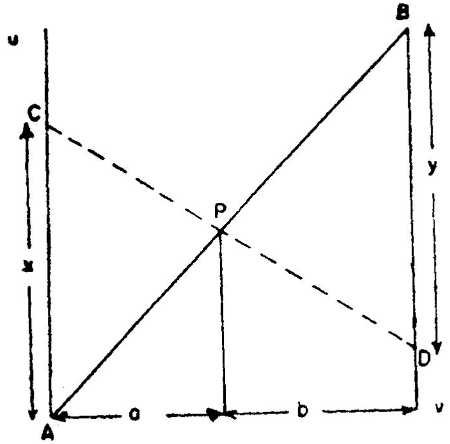
மாறியின் மதிப்பைக்காண அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமைக்கப்பட்டன. இச் சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காண மற்றொரு வரைபட முறையும் உண்டு. இம்முறையில் u, v-அளவுகோல்களை இரு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும். பின்னர் இவ்விரண்டு இணைகோடுகளுக்கும் நடுவில் இயக்குமையப் புள்ளி (pivotal point) எனச் சொல்லப்படும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கவேண்டும். இப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் எந்த நேர்கோடும் u, v-அளவுகோல்களை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும். இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட படத்திற்கு இணையளவுகோல் அளவுமாற்ற விளக்கப்படம் (parallel scale conversion chart) எனப் பெயர்.

படத்தில் இயக்குமையப் புள்ளியை எங்கு குறிக்கவேண்டும் என்பதற்கான விடையை இப்பொழுது காணலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

u-க்கு $\quad x = m_1 f_1 (u)$

v-க்கு $\quad y = m_2 f_2 (v)$

எனக் கொள்க. A, B என்ற புள்ளிகளைத் தொடக்கப் புள்ளிகளாகக் கொண்டு u, v- அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது



படம் 38

ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் அமை (படம் 38). u, v இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளை இணைக்குமாறு CD என்ற நேர்கோடு வரை. இது AB-ஐ P என்னும் புள்ளியில் வெட்டட்டும். C என்னும் புள்ளி u-வின் மதிப்பையும் D என்னும் புள்ளி v-யின் மதிப்பையும் குறிப்பதால் $AC = x$; $BD = y$. A, B என்பன முறையே

u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஆதலால் u, v-மதிப்புகளுக்கான தூரங்கள் இப்புள்ளிகளிலிருந்து அளக்கப்படுகின்றன.

வடிவொத்த முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்களுக்கிடையே உள்ள விகிதம், ஒத்த குத்துயரங்களுக்கு (altitudes) இடையே உள்ள விகிதத்திற்குச் சமம். APC, BPD என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AC}{BD} = \frac{a}{b}$$

அதாவது $$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

இங்கு a, b என்பன முறையே P-யிலிருந்து AC-க்கும், BD-க்கும் வரையப்பட்ட குத்துயரங்கள் ஆகும். மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் x, y இவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் (functional values) பதிலிட,

$$\frac{m_1 f_1(u)}{m_2 f_2(v)} = \frac{a}{b}$$

இச்சமன்பாடு

$$f_1(u) = f_2(v)$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a}{b}$$

எனவே u, v-அளகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி வழியாக, u, v-அளவுகோல்களுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட நேர்கோடும், AB-யும் சந்திக்கும் புள்ளியே இயக்குமையப் புள்ளி எனத் தெரிகிறது. APC, BPD என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AP}{BP} = \frac{a}{b}$$

என்பதால் AB-ஐ $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தும் P என்னும் இயக்குமையப் புள்ளியைக் குறிக்கலாம்.

P வழியாகச் செல்லும் எந்த நேர்கோடும் u, v-அளவுகோல்களை ஒத்த மதிப்புகளில் வெட்டும். எனவே ஒரு மாறியின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால் அதற்குரிய அளவுக்குறியீட்டையும் P-ஐயும் ஒரு நேர்கோட்டால் இணைக்கவேண்டும். இக்கோடு மற்றொரு மாறிக்குரிய அளவுகோலை ஒத்த மதிப்பில் வெட்டும். ஒரு மாறியின்

மதிப்பிலிருந்து அதற்கு ஒத்த மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக்காண வரையப்படும் நேர்கோட்டுக்குக் குறியிணைப்புக் கோடு (index line) எனப் பெயர். ஒத்த மதிப்புகளுக்குரிய அளவுக் குறியீடுகளை இணைத்துக்காட்டும் கோடென்பதால் இதற்கு இப்பெயர் வந்ததெனலாம்.

இயக்குமையப் புள்ளியைக் குறிக்க இரண்டு முறைகள் மேலே சொல்லப்பட்டன. இவற்றைத் தவிர வேறிரண்டு முறைகளும் உள்ளன. u, v இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளை இணைக்கும் நேர்கோடு P வழியாகச் செல்லும். மேலும் P என்னும் புள்ளி தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் மீது உள்ளது. எனவே u, v இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளை இணைக்கும் ஒரு நேர்கோட்டை வரைந்து, இக்கோடு AB-ஐ வெட்டும் புள்ளியை இயக்குமையப் புள்ளியாகக் குறிக்கலாம்.

u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் AB என்ற நேர்கோடும் ஒரு குறியிணைப்புக் கோடே என்பதை அறிக. A, B என்ற புள்ளிகளுக்கான அளவீடுகளை முறையே u_0, v_0 எனக் கொண்டால்

$$f_1(u_0) = 0$$

$$f_2(v_0) = 0$$

எனவே $$f_1(u_0) = f_2(v_0)$$

இதிலிருந்து u_0, v_0 என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v இவற்றின் மதிப்புகள் எனத் தெரிகிறது. எனவேதான் u_0, v_0 என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளை இணைக்கும் AB என்ற கோடு இயக்குமையப் புள்ளி வழியாகச் செல்கிறது.

u, v இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளை இணைக்கும் நேர்கோடுகள் யாவும் அதாவது குறியிணைப்புக் கோடுகள் யாவும் P வழியாகச் செல்வதால் ஏதேனும் இரு குறியிணைப்புக் கோடுகள் வரைந்து அவை வெட்டிக்கொள்ளும் புளளியை இயக்குமையப் புள்ளியாகக் குறிக்கலாம். இறுதியாகச் சொல்லப்பட்ட இந்த முறையே இயக்குமையப் புள்ளியைக் குறிக்க எளிய முறையாகும். தொடக்கப் புள்ளிகளை அளவுகோல்களின் மீது குறிக்கமுடியாத சூழ்நிலையில் முதல் மூன்று முறைகளும் இயக்குமையப் புள்ளியைக் குறிக்கப் பயன்படா.

இரு மாறிச் சமன்பாட்டுக்குத் (two variable equation) தீர்வு காணப் பயன்படும் இணையளவுகோல் அளவுமாற்ற விளக்கப் படத்தை அடுத்திலா அளவுகோல்களைக் (non-adjacent scales)

கொண்ட விளக்கப்படம் எனவும் சொல்லலாம். இரு மாறிச் சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வுகாண அடுத்துள்ள அளவுகோல்களைவிட அடுத்திலா அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்துவதில் சில நன்மைகள் உண்டு. அளவுகோல் நீளங்கள் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லை. m_1, m_2 இவற்றின் மதிப்புகள் ஒன்றையொன்று சார்ந்தன அல்ல என்பதால் m_1, m_2-மதிப்புகளை u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டையுமே எளிதாக அமைப்பதற்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ளலாம். மேலும் u, v-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் எதுவாயினும் இருக்கலாம்.

அடுத்துள்ள அளவுகோல்களை அமைக்கும்பொழுது பொருத்தப் புள்ளியைக் குறிக்க u, v இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளின் ஒரு தொகுதிதான் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டது. ஆனல் அடுத்திலா அளவுகோல்களை அமைக்கும்பொழுது இயக்குமையப் புள்ளியைக் குறிக்க u, v இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளின் இரண்டு தொகுதிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 10

50 முதல் 300 முடிய உள்ள பவுண்டுகளைக் (Pounds) கிலோகிராமாக (Kilogram) மாற்ற அடுத்திலா அளவுகோல்களைக் கொண்ட விளக்கப்படம் ஒன்றை அமை (1 கி.கி = 2.205 பவுண்டு).

P என்னும் மாறி பவுண்டையும் K என்னும் மாறி கிலோகிராமையும் குறிப்பதாகக் கொள்க. எனவே

$$P = 2.205\ K$$

1 கி.கி. = 2.205 பவுண்டு என்பதால்

$$K = 2.205\ P$$

எனப் பெரும்பாலோர் எழுதக்கூடும். இது தவறு. 2.205 பவுண்டு என்பதில் பவுண்டு என்பது ஓர் அளவை அலகே (unit of measurement) ஒழிய 2.205 என்ற எண்ணைப் பெருக்கும் அளவு அல்ல. இப்பொழுது

$$P = 2.205\ K$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு அடுத்திலா அளவுகோல்களை அமைக்கலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1\ P$$
$$y = m_2\ (2.205\ K)$$

எனக் கொள்க.

P-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1\,(300 - 50)$$
$$= 250\,m_1$$

$m_1 = 0.05$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே P-அளவு கோலின் நீளம் 12.5 செ.மீ. ஆகும். P-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 0.05\ \text{P}$$

ஆகும். ஆகவே, 0.5 செ.மீ. நீளம் P-யின் 10 அலகுகளைக் குறிக்குமாறு, P-அளவுகோலை ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டின்மீது அமைத்துக் கொள்க (படம் 39). மேலும் P-அளவுகோலைக் கீழிருந்து மேலாக அமைத்துக் கொள்க. எனவே P-அளவு கோலின் மீது அளவீடுகள் கீழிருந்து மேலாகக் கூடிக் கொண்டு செல்லும். P-அளவுகோலின்மீது 50 முதல் 300 முடிய அளவீடுகள் செய்யவேண்டும்.

$$\text{P} = 50 \text{ எனில் } \text{K} = \frac{50}{2.205} = 22.68$$

$$\text{P} = 300 \text{ எனில் } \text{K} = \frac{300}{2.205} = 136.1$$

எனவே K-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து.

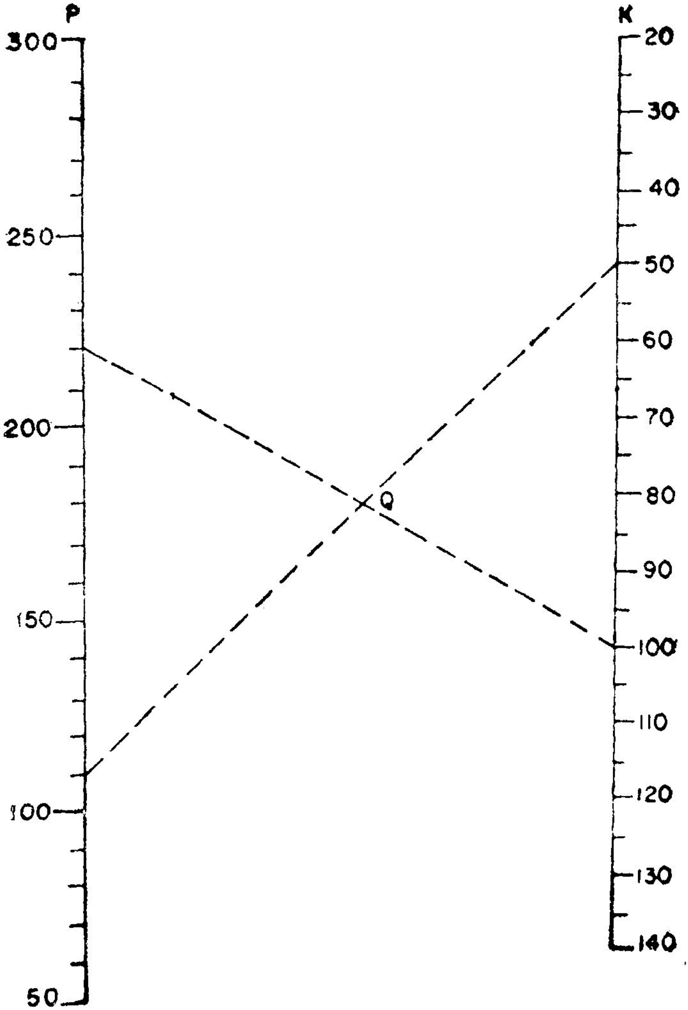
$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = 2.205\,m_2\left[\frac{300}{2.205} - \frac{50}{2.250}\right]$$
$$= 250\,m_2$$

அளவுகோல் நீளத்தை 12.5 செ.மீ. எனக் கொண்டால் $m_2 = 0.05$. எனவே K-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$y = 0.11025\ \text{K}$$

ஆகும். இந்தச் சமன்பாட்டுக்குரிய அளவுகோலை அமைப்பது எளிதல்ல. இதற்கு விகிதசம விளக்கப்பட முறையின் உதவி தேவைப்படுகிறது. P, K-அளவுகோல்களின் நீளங்கள் சமமாயிருக்கத் தேவையில்லை. மேலும் அளவுகோலைச் சமமாக எடுத்துக் கொண்டால் m_1, m_2 ஆகிய இரண்டும் சமமாக இருக்கும். m_1, m_2 ஆகிய இரண்டையும் சமமாக எடுத்துக்கொண்டு அடுத்திலா அளவுகோல்களை அமைப்பதால், அடுத்திலா அளவு கோல்களுக்கே உரித்தான சில நன்மைகள் இல்லாமல் போய்

விடும். எனவே K-அளவுகோலை எளிதாக அமைப்பதற்கேற்ப m_2 - இன் மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.



படம் 39

$m_2 = \dfrac{1}{22.05}$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே K-அளவு கோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$y = \frac{2.905}{22.05}\ \mathrm{K}$$

அதாவது $y = 0.1$ K

ஆகும். எனவே K-அளவுகோலில் ஒரு செ. மீ. நீளம் K-யின் 10 அலகுகளைக் குறிக்கும். K-அளவுகோலை, P-அளவுகோலுக்கு இணையான ஒரு கோட்டின்மீது, P-அளவுகோல் அமைக்கப்பட்ட திசைக்கு எதிர்த்திசையில் அமைக்கவேண்டும். எனவே K-அளவுகோலை ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டின்மீது மேலிருந்து கீழாக அமைத்துக் கொள்க. K-அளவுகோலில் அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழாகக் கூடிக்கொண்டு செல்வதைக் காணலாம். P, K-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை எதுவாக வேண்டுமானாலும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். P, K-அளவுகோல்கள் ஒரே மட்டத்தில் இருக்கத்தேவையில்லை. K-அளவுகோலில் 20 முதல் 140 முடிய அளவீடுகள் செய்துகொள்ளலாம். தேவையான அளவீடுகள் 22.68 முதல் 136.1 முடியவே என்றாலும் தேவைக்கு மேற்பட்டு அளவீடுகள் செய்வதில் தவறொன்றும் இல்லை.

P, K-அளவுகோல்களை அமைத்து முடித்ததும் P = 220.5, K = 100 என்ற மதிப்புகளுக்கான குறியிணைப்புக் கோட்டையும், P = 110.25, K = 50 என்ற மதிப்புகளுக்கான குறியிணைப்புக் கோட்டையும் வரையவேண்டும். இக்குறியிணைப்புக் கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிதான் இயக்குமையப்புள்ளி Q ஆகும். Q வழியே செல்லும் எந்த நேர்கோடும் P, K இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளைக் கொடுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11

ஒரு பொருள் ஓர் உயரத்திலிருந்து தானே விழுவதற்கான இயக்கச் சமன்பாடு (equation of motion) $s = \frac{1}{2} gt^2$ ஆகும்.

இங்கு s = பொருள் பயணம் செய்த தூரம், மீட்டர்.
t = நேரம், (5 — 20) நொடி
g = ஈர்ப்பு முடுக்கம் (acceleration due to gravity), மீ. / நொடி^{2}

g-யின் மதிப்பை 9.81 எனக்கொண்டு s, t என்னும் மாறிகளுக்கு அடுத்திலா அளவுகோல்களைக் கொண்ட விளக்கப்படம் ஒன்றை அமை.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை மடக்கை அமைப்பில் எழுதிக் கொள்க. எனவே

$$\log s = \log 4.905 + 2 \log t$$

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \log s$$
$$y = m_2 [\log 4.905 + 2 \log t]$$

எனக் கொள்க.

t-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = 2 m_2 (\log 20 - \log 5)$$
$$= 2 m_2 \log 4$$
$$= m_2 \log 16$$
$$= 1.2041\, m_2$$

$m_2 = 10$ என எடுத்துக் கொள்க.

$$t = 5 \text{ எனில் } s = 25 (4.905)$$
$$= 122.625$$
$$t = 20 \text{ எனில் } s = 400 (4.905)$$
$$= 1962$$

s-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

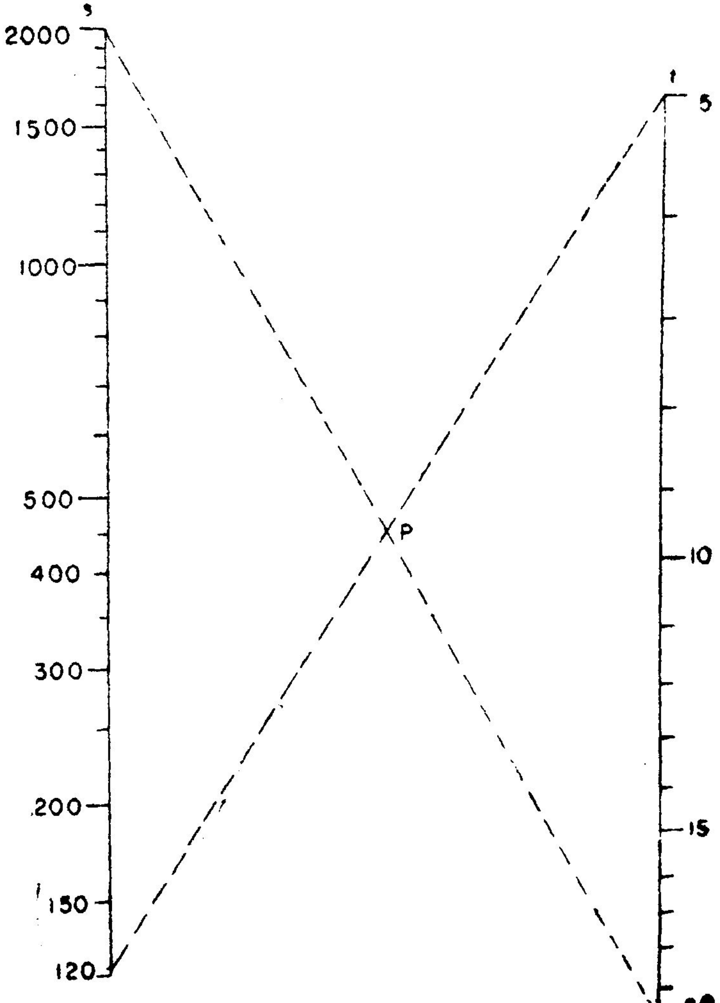
$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 [\log 1962 - \log 122.625]$$
$$= m_1 \log 16$$
$$= 1.2041\, m_1$$

$m_1 = 10$ என எடுத்துக் கொள்க. இக்கணக்கில் m_1, m_2 இவைகளுக்கு ஒரே மதிப்பை எடுத்துக் கொள்வதற்குக் காரணம் அளவுகோல் நீளங்கள் சமமாக இருக்கவேண்டும் என்பதற்காக அல்ல. அளவுகோல்களை எளிதாக அமைப்பதற்கேற்பக் குறியீட்டுக் குணகங்கள் கிடைப்பதற்காகவே என்பதை உணர்க. இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 10 \log s$$
$$y = 20 \log t + 10 \log (4.905)$$

ஆகும். s, t -அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது எதிரெதிர்த் திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும். இணைகோடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் எதுவாயினும் சரி. 10, 20 என்ற குறியீட்டுக் குணகங்களுக்கான அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோல்கள் இருப்பதால், s, t- அளவுகோல்களை மிக எளிதில்

அமைத்துவிடலாம். t-அளவுகோலில் 5 முதல் 20 முடியவும், s-அளவுகோலில் 120 முதல் 2000 முடியவும் அளவீடுகள் செய்து கொள்க (படம் 40). s, t-அளவுகோல்களை அமைத்து முடித்ததும்



படம் 40

$s = 122.625$, $t = 5$ என்ற மதிப்புகளுக்கான குறியிணைப்புக் கோட்டையும் $s = 1962$, $t = 20$ என்ற மதிப்புகளுக்கான குறியிணைப்புக் கோட்டையும் வரைந்து கொள்க. இக்குறியிணைப்புக்

கோடுகள் இரண்டும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிதான் இயக்குமையப் புள்ளி P ஆகும். P வழியே செல்லும் எந்த நேர்கோடும் s, t இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளைக் கொடுக்கும்.

7. நழுவு கணிப்பான் (Slide Rule)

$$(u) = f_2 (v)$$

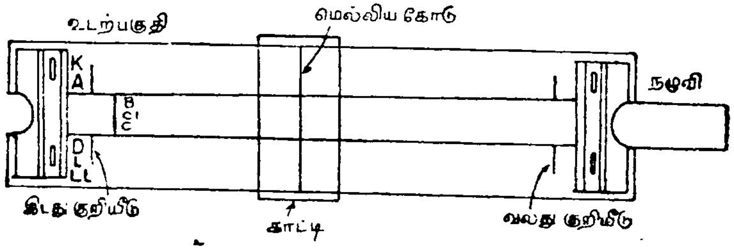
என்ற சமன்பாட்டுக்கு அமைத்த அடுத்துள்ள அளவுகோல்களை நிலையான அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் (stationary adjacent scales) என அழைக்க வேண்டும். இரண்டு அளவுகோல்களை அமைத்து, அவற்றை ஒன்றன் மீது ஒன்று நழுவிச் செல்லுமாறு செய்தால் கிடைக்கும் அமைப்புக்கு, நழுவிச் செல்லும் அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் (sliding adjacent scales) எனப் பெயர். நிலையான அடுத்துள்ள அளவுகோல்களைக் காட்டிலும் நழுவிச் செல்லும் அடுத்துள்ள அளவுகோல்களால் மிகுந்த பயன் உண்டு. நழுவிச் செல்லும் அடுத்துள்ள அளவுகோலகளை அடிப் படையாகக் கொண்டு அமைக்கப்பட்டதே, கணக்கீடுகளை விரைவில் செய்யப் பெரிதும் பயன்படுகின்ற நழுவு கணிப்பான் என்னும் கருவியாகும். இக்கருவி பொறியாளர்களின் இன்றிய மையாத் தேவையாகும்.

நேர்கோட்டுத் துண்டுகளைக் (segments) கூட்டவோ கழிக்கவோ இயன்றவாறு அமைக்கப்பட்டது நழுவு கணிப்பான் ஆகும். பெருக்கல், வகுத்தல், படி (power) காணல், படிமூலம் (root) காணல், தலைகீழ் (reciprocal) காணல் போன்ற கணக்குகளைச் செய்யப் பயன்படும் நழுவு கணிப்பான், மடக்கை களின் கோட்பாடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டது. நழுவு கணிப்பானைப் பயன்படுத்திக் கணக்குகளைப் போடவல்ல பொறியாளரோ, அறிவியலாரோ, எந்த அடிப்படைக் கொள்கையில் அக்கணக்குகளுக்கு விடை கிடைக்கின்றது எனத் தெரிந்து கொள்ளவேண்டும் அல்லவா? எனவே நழுவு கணிப்பானைப் பற்றிய அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் இங்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எனினும், நழுவு கணிப்பானை எப்படிப் பயன்படுத்தவேண்டும் என்பதை அக்கருவியுடன் கிடைக்கும் கையேடுகளில் விரிவாகக் காணலாம் என்பதால் அவற்றைப் பற்றியவை இப்பாடநூலில் விரிவாக எழுதப்படவில்லை.

நழுவு கணிப்பானின் பகுதிகள்

நழுவு கணிப்பானில் உடற்பகுதி (body), நழுவி (slide), காட்டி (cursor) என்ற மூன்று பகுதிகள் உள்ளன. உடற்பகுதியில் பல்வேறு அளவுகோல்கள் அமைக்கப்பட்டிருக்கும். உடற்

பகுதியின் பின்புறத்திலும் அளவுகோல்கள் அமைக்கப் பட்டிருக்கும். உடற்பகுதியின் நடுவில் வரிப்பள்ளம் (groove) ஒன்று உள்ளது அதன் மேல் நழுவிச் செல்லுமாறு நழுவி ஒன்று உள்ளது. இந் நழுவியின்மீதும் பல அளவுகோல்கள் அமைக்கப் பட்டுள்ளன. நழுவியின் பின்புறத்திலும் அளவுகோல்கள் அமைக்கப்பட்டிருக்கும். நழுவியை இடப் பக்கமாகவும் வலப் பக்கமாகவும் நகர்த்தமுடியும். நழுவியானது அதை மெதுவாகத் தள்ளினுலே நகரக் கூடிய அளவுக்கு உடற்பகுதியின் வரிப் பள்ளத்தின்மீது அமைந்திருக்கும். அதே நேரத்தில் உடற் பகுதிக்கும் நழுவிக்கும் இடையே இடைவெளி இருக்காது. இடைவெளி இருந்தால் நழுவியானது உடற்பகுதிமீது ஒட்டிக் கொண்டிராமல் கீழே விழுந்து விடும்.



படம் 41

உடற்பகுதி, நழுவி இவ்விரண்டின் மீதும் ஒளிபுகும் பொருளாலான காட்டி என்னும் ஒரு பகுதி உள்ளது. இதை இடப் பக்கமாகவும் வலப் பக்கமாகவும் நகர்த்தலாம். இக் காட்டியின் நடுவில் மெல்லிய நிலைக்குத்துக்கோடு ஒன்று உள்ளது. உடற்பகுதியின் மீதும் நழுவியின் மீதும் உள்ள அளவுகோல் களில் காணப்படும் அளவுக் குறியீடுகளின்மேல் இம்மெல்லிய கோடு ஒன்றியிருக்குமாறு காட்டியை நகர்த்தலாம். அடுத்திலா அளவுகோல்களை அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் போல இணைத்துத் தருவது இம்மெல்லிய கோட்டின் நோக்கம் ஆகும்.

நழுவு கணிப்பானின் அளவுகோல்கள்

C, D-அளவுகோல்கள்: C, D-அளவுகோல்கள் இரண்டும் ஒரு சுற்று மடக்கை அளவுகோல்கள் (one cycle logarithmic scales) ஆகும். இவ்விரண்டு அளவுகோல்களிலும் 1 முதல் 10 முடிய அளவீடுகள் இருக்கும். இரண்டும் ஒரே நீளம் உடையன. எனவே C, D-அளவுகோல்கள் இரண்டும் முழுதொத்த (identical) அளவு கோல்கள் ஆகும். C-அளவுகோல் நழுவியின்மீதும் D-அளவு

கோல் உடற்பகுதியின் மீதும் உள்ளன. இந்த இரண்டு அளவு கோல்களையும் பயன்படுத்திப் பெருக்கல் வகுத்தல் கணக்குகளைச் செய்யமுடியும். நடைமுறையில் பயன்படுத்தப்படும் நழுவு கணிப்பானில் இந்த அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் 25 செ.மீ. ஆகும். எனவே C, D-அளவுகோல்களின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 25 \log u$$

ஆகும்.

A, B-அளவுகோல்கள்: A, B-அளவுகோல்கள் இரண்டும் இருசுற்று மடக்கை அளவுகோல்கள் (two cycle logarithmic scales) ஆகும். இவ்விரண்டு அளவுகோல்களிலும் 1 முதல் 100 முடிய அளவீடுகள் இருக்கும். இரண்டும் ஒரே நீளம் உடையன. எனவே A, B-அளவுகோல்கள் இரண்டும் முழுதொத்த அளவு கோல்கள் ஆகும். A-அளவுகோல் உடற்பகுதியின்மீதும், B-அளவு கோல் நழுவியின் மீதும் உள்ளன. இந்த இரண்டு அளவுகோல் களையும் பயன்படுத்திப் பெருக்கல் வகுத்தல் கணக்குகளைச் செய்யமுடியும். A, B-அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் 25 செ.மீ. ஆதலால் இவற்றின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = \frac{25}{2} \log u$$

ஆகும்

K-அளவுகோல் : K-அளவுகோல் ஒரு முச்சுற்று மடக்கை அளவுகோல் (three cycle logarithmic scale) ஆகும். இதில் 1 முதல் 1000 முடிய அளவீடுகள் இருக்கும். இந்த அளவுகோல் நழுவியின்மீது இருக்கும். சில நழுவு கணிப்பான்களில் இது உடற்பகுதியின் மீது காணப்படும். இதன் நீளம் 25 செ.மீ. என்பதால் இதன் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = \frac{25}{3} \log u$$

ஆகும்.

L-அளவுகோல் : L-அளவுகோல் ஒரு சீர் அளவுகோல் அல்லது ஒருபடி அளவுகோல் (linear scale) ஆகும். இதில் 0 முதல் 1 முடிய அளவீடுகள் இருக்கும். இந்த அளவுகோல் நழுவியின் மீது இருக்கும். சில நழுவு கணிப்பான்களில் இது உடற்பகுதியின் மீது காணப்படும். இதன் நீளம் 25 செ.மீ. என்பதால் இதன் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 25\, u$$

ஆகும்.

CI, DI-அளவுகோல்கள் : CI, DI-அளவுகோல்கள் இரண்டும் ஒரு சுற்றுமடக்கை அளவுகோல்கள் ஆகும். இவ்விரண்டு அளவு கோல்களிலும் 0.1 முதல் 1 முடிய அளவீடுகள் இருக்கும். ஆனால், அளவீடுகள் வலமிருந்து இடமாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லும் CI-அளவுகோல் நழுவியின் மீதும் DI-அளவுகோல் உடற்பகுதியின் மீதும் உள்ளன. CI, DI-அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் 25 செ.மீ. ஆகும். ஒன்றுக்குறியைத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டால் இவ்விரு அளவுகோல்களின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = -25 \log u$$

ஆகும்.

LL-அளவுகோல்கள் : LL-அளவுகோல்கள் என்பன மடக்கை மடக்கை அளவுகோல்கள் (log log scales) ஆகும். நழுவு கணிப்பானின் உடற்பகுதியில், கீழே அமைக்கப்பட்ட LL_1, LL_2, LL_3-அளவுகோல்கள் மூன்றுக்கும் LL-அளவுகோல்கள் எனப் பெயர். இந்த அளவுகோல்கள் மூன்றும் தொடர்ச்சியான ஒரே அளவுகோலின் மூன்று பகுதிகள் ஆகும். LL_1-அளவுகோல் எந்த அளவீட்டில் முடிகிறதோ அந்த அளவீட்டில் LL_2-அளவுகோல் தொடங்குகிறது. LL_2-அளவுகோல் எந்த அளவீட்டில் முடிகிறதோ அந்த அளவீட்டில் LL_3-அளவுகோல் தொடங்குகிறது. இந்த அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி எண்களின் படிகளையோ, படிமூலங்களையோ காணலாம். அடுக்குக்குறிக் கோவைகளின் (exponential expressions) மதிப்பைக் காணவும் இந்த அளவு கோல்கள் பயன்படும். LL-அளவுகோல்களின் நெடுக்கங்கள் வருமாறு:

LL_1-அளவுகோல் : $e^{0.01}$ முதல் $e^{0.1}$ முடிய

LL_2-அளவுகோல் : $e^{0.1}$ முதல் e முடிய

LL_3-அளவுகோல் : e முதல் e^{10} முடிய

$$e^{0.01} = 1{\cdot}0101$$
$$e^{0.1} = 1.1052$$
$$e = 2.7183$$
$$e = 22026$$

எனக் கணிதப் பட்டியல்களில் (mathematical tables) காணலாம்.

LL_1-அளவுகோலில் $e^{0.01}$ என்ற அளவீட்டிலிருந்து தூரத்தை அளப்பதால் இதன் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 25 \; [\log \log u - \log \log 1.0101]$$

அதாவது $x = 25 \; [\log \log u - \log 0.004343]$

அதாவது $x = 25 \; [\log \log u - \bar{3}.6378]$

அதாவது $x = 25 \; [\log \log u + 2.3622]$

ஆகும்

LL_2-அளவுகோலில் $e^{0.1}$ என்ற அளவீட்டிலிருந்து தூரத்தை அளப்பதால் இதன் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 25 \; [\log \log u - \log \log 1.1052]$$

அதாவது $x = 25 \; [\log \log u + 1.3622]$

ஆகும்.

LL_3-அளவுகோலில் e என்ற அளவீட்டிலிருந்து தூரத்தை அளப்பதால் இதன் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 25 \; [\log \log u - \log \log 2.7183]$$

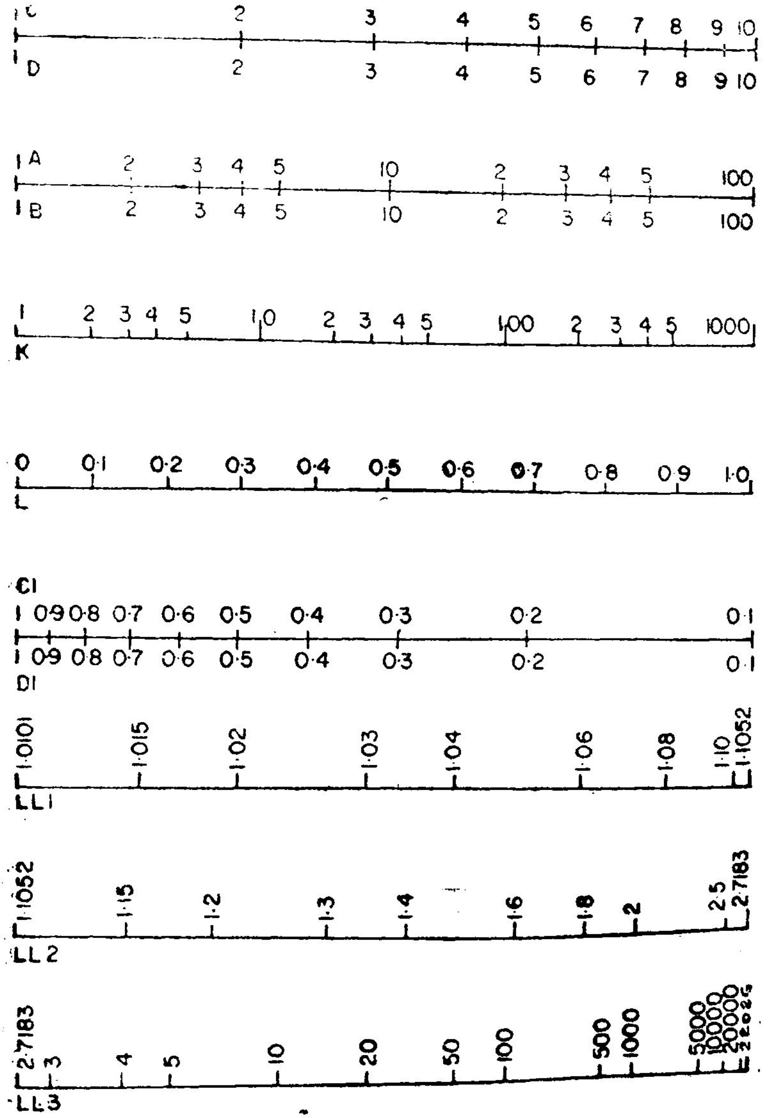
அதாவது $x = 25 \; [\log \log u + 0.3622]$

ஆகும். LL-அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் 25 செ.மீ. ஆகும்.

படம் 42 நழுவு கணிப்பானில் உள்ள அளவுகோல்கள் பலவற்றைக் காட்டுகிறது. படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள அளவு கோல்களில் முதன்மையான அளவீடுகள் மட்டுமே செய்யப் பட்டுள்ளன. ஆனால் நழுவு கணிப்பானில் உள்ள அளவுகோல் களில் பல்வேறு உட்பிரிவுகளுக்குரிய அளவுக் குறியீடுகள் செய்யப்பட்டிருக்கும். இவை படத்தில் காட்டப்படவில்லை. நடைமுறையில் உள்ள நழுவு கணிப்பானில் அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் 25 செ.மீ. என்றாலும் தாளின் அளவு போதாத காரணத்தால் படத்தில் 10 செ.மீ. நீளத்திற்கு அளவு கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் அவற்றின் பொது அமைப்பு மாறாமல் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

ஒரு நழுவு கணிப்பானில், C, D-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஒன்றியிருக்கும் பொழுது, மற்ற எல்லா அளவுகோல் களின் தொடக்கப் புள்ளிகளும் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மீது உள்ளதைப் பார்க்கலாம். ஒரு நழுவு கணிப்பானில் உள்ள ஒவ்வோர் அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கும் இடது குறியீடு

(left index) எனப் பெயர். ஒவ்வோர் அளவுகோலின் வலது முனையில் அதாவது தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து 25 செ.மீ. தூரத்தில் உள்ள அளவுக் குறியீட்டுக்கும் வலது குறியீடு (right index) எனப் பெயர்.

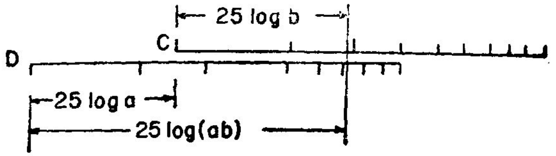


படம் 42

நழுவு கணிப்பானில் உள்ள அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகள்

பெருக்கல், வகுத்தல் கணக்குகளைச் செய்வதற்கும் படி, படிமூலம், மடக்கை, எதிர் மடக்கை (anti-logarithm), தலைகீழ் ஆகியவற்றைக் காண்பதற்கும் ஏற்ப நழுவு கணிப்பானில் உள்ள அளவுகோல்கள் எவ்வாறு தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்பதை இப்பொழுது காணலாம்.

C, D-அளவுகோல்கள் பெருக்கல் கணக்குகளுக்கு விடை காண மிகுதியாகப் பயன்படுத்தப்படும். இரண்டு எண்களின் மடக்கைகளைக் கூட்டுவதற்கேற்ற வகையில் C, D-அளவுகோல்கள் அமைந்துள்ளன. இதன் கோட்பாட்டைப் படம் 43 விளக்கிக்



படம் 43

காட்டுகிறது. $a \times b$ என்பதன் மதிப்பைக் காண, C-அளவுகோலின் இடது குறியீடு D-அளவுகோலின் a என்ற அளவீட்டுடன் ஒன்றியிருக்குமாறு நழுவியை நகர்த்தவேண்டும். C-அளவுகோலின் b என்ற அளவீட்டுடன் ஒன்றியிருக்கும் D-அளவுகோலின் அளவீடே $a \times b$ என்பதன் விடையாகும்.

D-அளவுகோலின் a என்ற அளவீட்டுக்கும் D-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் 25 log a செ.மீ. ஆகும். C-அளவுகோலின் b என்ற அளவீட்டுக்கும் C-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் 25 log b செ.மீ. ஆகும். எனவே C-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியானது D-அளவுகோலின் a என்ற அளவீட்டுடன் ஒன்றியிருக்கும்பொழுது, C-அளவுகோலின் b என்ற அளவீட்டுடன் ஒன்றியிருக்கக்கூடிய D-அளவீடானது, D-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து (25 log a + 25 log b) அதாவது 25 log (ab) செ.மீ. தூரத்தில் இருக்கும். எனவே, D-அளவீடு ab ஆகும். இதே கோட்பாட்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு A, B அளவுகோல்களையும் பெருக்கல் கணக்குகளுக்கு விடை காணப் பயன்படுத்தலாம்.

ஓர் எண்ணின் மடக்கையிலிருந்து மற்றோர் எண்ணின் மடக்கையைக் கழிப்பதை அடிப்படையாகக் கொண்டு, C, D-

அளவுகோல்களை வகுத்தல் கணக்குகளுக்கு விடை காணப் பயன் படுத்தலாம். $\frac{a}{b}$ என்பதன் மதிப்பைக் காண D-அளவுகோலின் a என்ற அளவீடும் C-அளவுகோலின் b என்ற அளவீடும் ஒன்றி யிருக்குமாறு நழுவியை நகர்த்தவேண்டும். C-அளவுகோலின் இடது குறியீட்டுடன் ஒன்றியுள்ள D-அளவீடே $\frac{a}{b}$ என்பதன் விடையாகும். இதே முறையில் A, B-அளவுகோல்களைப் பயன் படுத்தியும் வகுத்தல் கணக்குகளைச் செய்யலாம்.

D, A-அளவுகோல்களைக் காட்டியில் உள்ள மெல்லிய கோட்டின் உதவியால் அடுத்துள்ள அளவுகோல்களாகக் கருதலாம். D-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 25 \log u$$

என்றும் A-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = \frac{25}{2} \log u$$

என்றும் சொல்லப்பட்டது. D-அளவுகோலின் u என்ற அள வீட்டுக்கு நேர் எதிரே A-அளவுகோலில் உள்ள அளவீடு v எனக் கொண்டால்

$$25 \log u = \frac{25}{2} \log v$$

$$\text{எனவே } u^2 = v$$

$$\text{அல்லது } u = \sqrt{v}$$

D, A-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகள் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டின்மீது அமைவதால்தான் இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட தூரங்களையும் சமப்படுத்த முடிகிறது. $u^2 = v$ என்பதால் D-அளவுகோலின் u என்ற மதிப்புக்கு நேர் எதிரே A-அளவுகோலில் உள்ள மதிப்பு u^2 எனத் தெரிகிறது. $u = \sqrt{v}$ என்பதால் A-அளவுகோலின் v என்ற மதிப்புக்கு நேர் எதிரே D-அளவுகோலில் உள்ள மதிப்பு $\sqrt{v}$ எனத் தெரிகிறது. இவ்வாறு D, A-அளவுகோல்களை இருபடி காணவும், இருபடி மூலம் காணவும் பயன்படுத்தலாம். இதே அடிப்படையில் C, B-அளவுகோல்களை யும் இருபடி, இருபடி மூலம் காணப் பயன்படுத்தலாம்.

K-அளவுகோல் உடற்பகுதியில் இருந்தால், D, K-அளவுகோல் களைப் பயன்படுத்தியும், K-அளவுகோல் நழுவியில் இருந்தால்,

C, K-அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தியும் முப்படி, முப்படி மூலம் (cube root) இவற்றைக் காணலாம். K-அளவுகோல் நழுவியின் மீதுள்ளது எனக் கொள்க. C-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 25 \log u$$

ஆகும். K-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = \frac{25}{3} \log u$$

ஆகும். C-அளவுகோலின் u என்ற அளவீட்டுக்கு நேர் எதிரே K-அளவுகோலில் உள்ள அளவீடு v எனக் கொண்டால்

$$25 \log u = \frac{25}{3} \log v$$

$$\text{எனவே } u^3 = v$$

$$\text{அல்லது } u = \sqrt[3]{v}$$

C, K-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டின்மீது அமைவதால்தான் இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட தூரங்களையும் சமப்படுத்த முடிகிறது. $u^3 = v$ என்பதால் C-அளவுகோலின் u என்ற மதிப்புக்கு நேர்எதிரே K-அளவுகோலில் உள்ள மதிப்பு u^3 எனத் தெரிகிறது. $u = \sqrt[3]{v}$ என்பதால் K-அளவுகோலின் v என்ற மதிப்புக்கு நேர்எதிரே C-அளவுகோலில் உள்ள மதிப்பு $\sqrt[3]{v}$ எனத் தெரிகிறது.

நழுவியின் மீதுள்ள K-அளவுகோலையும் உடற்பகுதியின் மீதுள்ள K-அளவுகோலையும் பயன்படுத்தி முப்படி, முப்படி மூலம் இவற்றைக் காணலாம். இதற்கு D, K-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மீது அமையுமாறு நழுவியைச் சரி செய்து கொள்ளவேண்டும்.

L-அளவுகோல் நழுவியின் மீதுள்ளது எனக் கொள்க. L-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 25\, u$$

ஆகும். C-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 25 \log u$$

ஆகும். C-அளவுகோலின் u என்ற அளவீட்டுக்கு நேர் எதிரே L-அளவுகோலில் உள்ள அளவீடு v எனில்,

$$25 \log u = 25\, v$$

$$\text{எனவே } \log u = v$$

$$\text{அல்லது } u = \text{anti} \log v$$

ஆகவே, C-அளவுகோலின் u என்ற மதிப்புக்கு நேர் எதிரே L-அளவுகோலில் உள்ள மதிப்பு $\log u$ என்றும், L-அளவுகோலின் v என்ற மதிப்புக்கு நேர் எதிரே C-அளவுகோலில் உள்ள மதிப்பு anti log v என்றும் தெரிகிறது. L-அளவுகோல் உடற்பகுதியின் மீதிருந்தால் D, L-அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி ஓர் எண்ணின் மடக்கை, எதிர் மடக்கை இவற்றைக் காணலாம்.

CI-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = -25 \log u$$

ஆகும். C-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x = 25 \log u$$

ஆகும். C-அளவுகோலின் u என்ற அளவீட்டுக்கு நேர் எதிரே CI-அளவுகோலில் உள்ள அளவீடு v எனில்,

$$25 \log u = -25 \log v$$

$$\text{எனவே } u = \frac{1}{v}$$

$$\text{அல்லது } v = \frac{1}{u}$$

எனவே C-அளவுகோலின் u என்ற மதிப்புக்கு நேர் எதிரே CI-அளவுகோலில் உள்ள மதிப்பு $\frac{1}{u}$ என்றும், CI-அளவுகோலின் v என்ற மதிப்புக்கு நேர் எதிரே C-அளவுகோலில் உள்ள மதிப்பு $\frac{1}{v}$ என்றும் தெரிகிறது. C-அளவுகோலில் உள்ள எண்களின் தலைகீழ் மதிப்பை CI-அளவுகோல் கொடுப்பதால் இதற்கு CI (C-Inverted) அளவுகோல் எனப் பெயர் வந்தது.

C-அளவுகோலில் உள்ள மதிப்புகளுக்கான தலைகீழ் மதிப்பை CI-அளவுகோல் கொடுப்பதால் C, D-அளவுகோல்களைப் பயன் படுத்திச் செய்யும் பெருக்கல், வகுத்தல் கணக்குகளை CI, D-அளவு கோல்களைப் பயன்படுத்தி முறையே வகுத்தல், பெருக்கல் கணக்கு களாகச் செய்யலாம்.

LL-அளவுகோல்கள் இருப்பதால் நழுவு கணிப்பான் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கிறது. C-அளவுகோலின் துணையோடு இந்த LL-அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி அடுக்குக்குறிச் சமன்பாடு

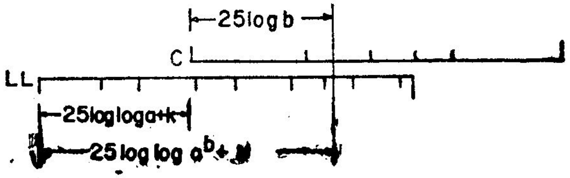
களின் (exponential equations) தீர்வையும், ஓர் எண்ணின் படி, படிமூலம் ஆகியவற்றையும் காணலாம். $u = a^b$ எனில்

$$\log u = b \log a$$

அதாவது $\log \log u = \log b + \log \log a$

எனவே C-அளவுகோலின் இடது குறியீடு LL-அளவுகோலின் a என்ற அளவீட்டுக்கு நேர் எதிரே இருக்குமாறு நழுவியை நகர்த்தினால், C-அளவுகோலின் b என்ற அளவீட்டுக்கு நேர் எதிரே அதே LL-அளவுகோலில் உள்ள அளவீடே a^b ஆகும்.

a என்ற அளவீடு LL_2-அளவுகோலில் இருப்பதாகக் கொள்க. எனவே a^b என்ற அளவீட்டை LL_2-அளவுகோலில்தான் பார்க்க வேண்டும். LL_2-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கும் LL_2-அளவுகோலின் a என்ற அளவீட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் [$25 \log \log a + k$] செ.மீ. ஆகும். இங்கு $k = 25\,(1.3622)$. C-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கும் C-அளவுகோலின் b என்ற அளவீட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் $25 \log b$ செ.மீ. ஆகும். எனவே C-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியானது LL_2-அளவுகோலின் a என்ற புள்ளிக்கு நேர் எதிரே இருக்கும் பொழுது, C-அளவுகோலின் b என்ற அளவீட்டுக்கு நேர் எதிரே இருக்கக்கூடிய LL_2-அளவீடானது, LL_2-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து [$25 \log \log a + 25 \log b + k$) அதாவது [$25 \log \log a^b + k$] செ.மீ. தூரத்தில் இருக்கும் (படம் 44). எனவே LL_2-அளவீடு a^b ஆகும்.



படம் 44

$(a)^{\frac{1}{b}}$ என்பதன் மதிப்பைக் காண வேண்டுமெனில், CI-அளவுகோலின் இடது குறியீடு LL-அளவுகோலின் a என்ற அளவீட்டுக்கு நேர் எதிரே இருக்குமாறு நழுவியை நகர்த்தவேண்டும். CI-அளவுகோலின் b என்ற அளவீட்டுக்கு நேர் எதிரே, அதே LL-அளவுகோலில் உள்ள அளவீடே தேவையான விடையாகும்.

D, LL-அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி 1.0101 முதல் 22026 முடிய உள்ள எண்களின் இயல் மடக்கை (natural logarithm) எனச் சொல்லப்படும் நேப்பியர் மடக்கையைக் (Napier logarithm) காணலாம்.

மேற்சொன்ன அளவுகோல்களைத் தவிர LL_1, LL_2, LL_3,-அளவுகோல்களின் மதிப்புகளுக்குத் தலைகீழ் மதிப்புகளைக் கொடுக்கும் LL_{01}, LL_{02}, LL_{03},-அளவுகோல்களும், C, D-அளவு கோல்களின் மதிப்புகளை π என்ற எண்ணால் பெருக்கக் கிடைக்கும் மதிப்புகளைக் கொடுக்கும் CF, DF-அளவுகோல்களும், *u*-வின் மதிப்பிலிருந்து $\sqrt{1-u^2}$ என்பதன் மதிப்பைக் காண உதவும் P-அளவுகோலும், கோண கணிதச் சார்புகளுக்கான (trigonometric functions) பல அளவுகோல்களும் நழுவு கணிப்பானில் உள்ளன.

பல்வேறு வகையான கணக்குகளுக்கு விடை காணப் பயன் படுவது நடைமுறையில் உள்ள நழுவு கணிப்பான் ஆகும். ஒரு சில குறிப்பிட்ட கணக்குகளுக்குமட்டும் விடை காண உதவுமாறு, சிறப்பு நழுவு கணிப்பான்களையும் (special slide rules) உருவாக்கிக் கொள்ள முடியும். இந்தச் சிறப்பு நழுவு கணிப்பான்களில் அளவு கோல்கள் மிகுதியாக இருக்காது. நழுவு கணிப்பான்கள் பொது வாகச் செவ்வக (rectangle) அமைப்பில்தான் இருக்கும். வட்ட அமைப்பிலோ, உருளை (cylinder) அமைப்பிலோ சிறப்பாகச் சில நழுவு கணிப்பான்கள் இருப்பதும் உண்டு.

பயிற்சி

1. 6 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டின்மீது 40 கி.கி. முதல் 60 கி.கி. முடிய உள்ள எடைக்கு (weight) ஒரு சீர் அளவுகோல் அமை. 1 கி.கி. இடைவெளிக்கு அளவுக்குறியீடுகள் செய்.

2. 4 முதல் 500 கி.மீ. / மணி முடிய உள்ள திசை வேகத்திற்கு 10 செ. மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டின்மீது மடக்கை அளவுகோல் ஒன்று அமை. இதில் 4, 6, 8, 10, 20, 40, 60, 80, 100, 200, 300, 400, 500 கி. மீ. / மணி ஆகியவற்றிற்கு அளவுக்குறியீடுகள் செய்.

3. $\frac{50}{3}$ ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவு கோலின் ஒரு சுற்றை விகிதசம விளக்கப்பட முறையில் அமை.

4. $\log v^{1.4}$ என்பதன் மதிப்புகளைக் கொடுக்கக்கூடிய அளவு கோல் ஒன்று அமை. v-யின் நெடுக்கம் (4 - 14).

5. கீழ்க்கண்ட u-வின் சார்புகளுக்கு அளவுகோல்கள் அமை. u-வின் நெடுக்கங்கள் அடைப்புகளுக்குள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

(i) $7u^2$ (0 - 10)

(ii) $4 - 3\sqrt{u}$ (0 - 25)

(iii) $3 \log (u + 2)$ (—1.5 முதல் 1 முடிய)

(iv) $1.24 - 0.5 \log u$ (0.025 – 0.3)

(v) $\log \log u$ (10 - 1000)

(vi) $\frac{1}{5}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{10}\right)$ (0.1 - 0.5)

(vii) $\frac{3u + 1}{u + 2}$ (0 - 8)

(viii) $\sin u$ (0° - 180°)

6. $x = 0.25\,[u^2 - 8u + 25]$ என்ற குறியீட்டுச் சமன்பாட்டுக்கு ஓர் அளவுகோல் அமை. u-வின் நெடுக்கம் (0 - 10).

[குறிப்பு :- 0 முதல் 4 முடிய உள்ள u-வின் மதிப்புகளுக்கு அளவுகோல் தண்டின் ஒரு பக்கத்திலும் 4 முதல் 10 முடிய உள்ள u-வின் மதிப்புகளுக்கு அளவு கோல் தண்டின் மற்றொரு பக்கத்திலும் அளவுக் குறியீடுகள் செய்யவேண்டும். ஏனெனில் 0 முதல் 4 முடிய உள்ள இடைவெளியில் x ஒரு குறையும் சார்பாகும். 4 முதல் 10 முடிய உள்ள இடை வெளியில் x ஒரு கூடும் சார்பாகும்.]

கீழ்க்கண்ட வாய்பாடுகளுக்கு அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமை (7 - 17).

7. $C = 2.54\ I$

C = சென்டிமீட்டர், (0 - 100).

I = அங்குலம்.

8. $C = 2\pi r$

C = வட்டத்தின் பரிதி (circumference), செ.மீ.

r = வட்டத்தின் ஆரம் (radius), (20 - 80) செ.மீ.

9. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

V = கோளத்தின் (sphere) கனஅளவு (volume), செ. மீ.^{3}

r = கோளத்தின் ஆரம், (0 - 10) செ. மீ.

10. $A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$

A = சமபக்க முக்கோணத்தின் (equilateral triangle) பரப்பு, செ. மீ.^{2}

l = பக்கத்தின் நீளம், (5 – 20) செ. மீ.

11. $Q = 22\, d^2$

Q = 40 மீட்டர் நிலைமட்டம் (head) உள்ள ஒரு குழாய் வழியாக ஒரு நொடியில் வரும் நீரின் கனஅளவு, மீ.^{3}

d = குழாயின் விட்டம், (0.1 - 0.5) மீ.

12. $S = (36\pi)^{\frac{1}{3}}\, v^{\frac{2}{3}}$

S = கோளத்தின் மேற்பரப்பு (surface area), (350 - 1500) செ. மீ.^{2}

v = கோளத்தின் கனஅளவு, செ. மீ.^{3}

13. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

T = தனி ஊசலின் (simple pendulum) அலைவு நேரம் (period), நொடி.

l = ஊசலின் நீளம், (0.3 - 1.8) மீ.

g = 9.81 மீ./நொடி^{2}

14. $\in = \sigma T^4$

$\in$ = கதிர்வீசலின் வீதம் (rate of radiation).

T = தனிவெப்பநிலை (absolute temperature), $(1000 - 10{,}000)^\circ$ K.

σ = $(5.67)10^{-12}$ வாட்டு (watt)/செ.மீ.^{2} பாகை^{4}

15. $Nu = 0.02\,(Re)^{0.8}$

Nu = நசெல்ட்டின் எண் (Nusselt's Number)

Re = ரெனல்டின் எண், (5000 - 200,000)

16. Tk = 0.693

T = பொருள் பாதிஅளவு சிதைவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும்காலம், (10^2 - 10^5) ஆண்டு

k = சிதைவு மாறிலி (disintegration constant)

17. $\log E = 11 + 1.6\, M$

E = ஆற்றல் (energy), (10^{14} - 10^{25}) எர்கு (erg)

M = எண்மதிப்பு (magnitude),

மைக்ரான் (micron)

18. கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து x, y மதிப்புகளுக்குரிய அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமை.

x	12	15	21	26	33
y	173	270.3	529.5	811.5	1307

19. கீழ்க்கண்ட அட்டவணை வெவ்வேறு வெப்பநிலையில் நீரின் ஆவி அழுத்தத்தைப் (vapour pressure) பாதரசத்தின் (mercury) மி. மீட்டரில் கொடுக்கிறது. வெப்பநிலைக்கும் ஆவி அழுத்தத்திற்கும் உள்ள தொடர்பினைக் காட்டும் அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள் அமை.

வெப்பநிலை °C (t)	ஆவி அழுத்தம் (y)
0	4.58
10	9.21
20	17.54
30	31.82
40	55.32
50	92.51
60	149.38
70	233.70
80	355.10
90	525.80
100	760.00

கீழ்க்கண்ட வாய்பாடுகளுக்கு அடுத்திலா அளவுகோல்களைக் கொண்ட விளக்கப்படம் அமை (20 - 26).

20. $R = \frac{4}{5} C$

R = ரோமர் (Reamur) வெப்பநிலைப் பாகை

C = செல்சியஸ் வெப்பநிலைப் பாகை, (0 - 100)

21. $K = 1.609\, M$

K = கிலோமீட்டர் (Kilometre)

M = மைல் (Mile), (0 - 80)

22. $h = 0.79 + 0.0048\, t$

h = வெப்ப மாற்றக்கெழு (heat transfer coefficient)

t = வெப்பநிலை, (0 - 250) °C

23. $V = (1.28)\,10^{1}\sqrt{T}$

T = தனி வெப்பநிலை, $(0 - 1000)^{\circ}$ K
V = வெப்ப நியூட்ரானின் (thermal neutron) திசைவேகம், [0 - (4.5) 10^{5}] செ.மீ./நொடி

24. $v^{2} = 2gh$

v = திசைவேகம், செ.மீ. / நொடி
h = உயரம் (height), (0 - 500) செ. மீ.
g = 981 செ. மீ./நொடி^{2}

25. $C = \dfrac{18.5}{(Re)^{0.6}}$

C = இழுவைக் கெழு (drag coefficient)
Re = ரெனால்டின் எண், (0.3 - 1000)

26. $A = P\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^{n}$

A = கூட்டுத்தொகை (amount), ரூபாய்
P = அசல் (principal), 100 ரூபாய்
r = கூட்டுவட்டி (compound interest) வீதம், 10%
n = ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை (1 - 10)

27. 1 முதல் 10 முடிய உள்ள எண்களின் இயல் மடக்கையைக் காண இணையளவுகோல் அளவுமாற்ற விளக்கப்படம் அமை.

28. சார்பு அளவுகோல் என்றால் என்ன? நழுவு கணிப்பானில் உள்ள அளவுகோல்களுக்கும் சார்பு அளவுகோல்களுக்கும் உள்ள தொடர்பினை விளக்குக.

2. நேமவரையம்

(Nomogram)

முதல் அதிகாரத்தில் இருமாறிச் சமன்பாடுகளுக்கு வரைபட வாயிலாகத் தீர்வு காணப்பட்டது. இதற்கு மாறிக்கோர் அளவுகோலாக இரண்டு அளவுகோல்கள் ஒரே நேர்கோட்டின் மீதோ வெவ்வேறு நேர்கோடுகளின் மீதோ அமைக்கப்பட்டன. மூன்று அல் லது அதற்குக் கூடுதலான மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளுக்கு வரைபட வாயிலாகத் தீர்வு காணின், மாறிக்கோர் அளவுகோல் வீதம் மூன்று அல்லது அதற்குக் கூடுதலான அளவுகோல்களை அமைக்கவேண்டி வரும். எனவே அவற்றை ஒரே நேர் கோட்டின் மீது அமைக்க இயலாது. அவற்றை வேறு விதமாக அமைத்துத்தான் விளக்கப்படம் அமைக்கவேண்டும். இப்படிப் பட்ட விளக்கப் படத்திற்கே நேமவரைவு (nomograph) அல்லது நேமவரையம் (nomogram) எனப் பெயர்.

$$f_1(u) = f_2(v)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காணும்பொழுது இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட அளவுமாற்ற விளக்கப்படம் அமைக்கப்பட்டது அல்லவா? இவ்விளக்கப் படத்தையும் நேமவரையம் எனச் சொல்லலாம்.

8. நேமவரையங்களின் சிறப்பியல்புகள்

நேமவரையங்களின் நன்மைகள்

அறிவியல், பொறியியல் மற்றும் பல்துறைகளைச் சார்ந்த ஆய்வுப் பணிகளில் நாள்தோறும் ஒரே மாதிரியான கணக்கீடுகளைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்யவேண்டியிருக்கும். இதனால் காலம் வீணுவதைக் காணலாம். ஒரே மாதிரியான இக்கணக்கீடுகளை விரைவில் செய்ய உதவும் வரைபடத் தீர்வே நேமவரையம் ஆகும். நேமவரையத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு கணக்கீட்டைச் செய்ய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரமானது, இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை ஒரு நேர்கோட்டால் இணைப்பதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமேயாகும். நழுவு கணிப்பானின் உதவியால் ஒரு கணக்கீட்டை ஒருசில மணித்துளிகளில் (minutes) செய்யின், நேமவரையத்தின் உதவியால் அக்கணக்கீட்டை ஒருசில நொடி

களில் செய்யலாம். நேமவரையத்தை அமைப்பதில் காலம் செல வழிந்தாலும், இயற்கணிதக் (algebra) கணக்கீடுகளுக்குப் பதிலாக நேமவரைவுக் கணக்கீடுகளைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்யும் பொழுது இழந்துவிட்ட காலத்திற்கு ஈடு கிடைக்கிறது.

கணக்குப் பொறிகள் (calculators), மின்னணுக் கணிப் பொறிகள் (electronic computers) இவற்றின் மின்னல் வேகப் படையெடுப்புகள் மிகுந்த இந்நாளில், நேமவரைவைப் பயன் படுத்தும் பழக்கம் படிப்படியாகக் குறைந்து விரைவில் மறைந்து விடும் எனப் பலரும் எதிர்பார்க்கக் கூடும். அதற்கு மாறாக, நேம வரைவில் உள்ள ஆர்வம் இன்று வளர்ந்துகொண்டுதான் வருகிறது. இதன் காரணம் என்ன? நேமவரைவைப் பயன் படுத்துபவர் அதன் அடிப்படைக் கொள்கையை அறிந்திருக்கத் தேவையில்லை. ஆற்றல், பயிற்சி, அறிவுக் கூர்மை மிகுந்தவராக இருக்கத் தேவையில்லை. கணிதம் கற்றவராகவோ, வேதியியல் படித்தவராகவோ, பொறியியல் அறிந்தவராகவோ இருக்க வேண்டிய கட்டாயமும் இல்லை. ஆனால் வேறு முறைகளைப் பயன் படுத்திக் கணக்கீடுகளைச் செய்ய, ஆற்றலும் பயிற்சியும் கட்டாயம் தேவைப்படுகின்றன.

மின்னணுக் கணிப்பொறியைப் பயன்படுத்தி மிக விரைவில் கணக்கீடுகளைச் செய்யலாம். ஆனால் அதற்குக் கையருகில் மின்னணுக் கணிப்பொறி இருக்கவேண்டும். அத்துடன் ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கைச் செய்ய அதற்கெனத் துளைசெய்யப்பட்ட அட்டையிலோ (punch card) அல்லது ஒரு நாடாவிலோ (tape) நிகழ்ச்சி நிரல் (programme) இருக்கவேண்டும். மேலும் கணிப் பொறியை இயக்குபவரிடம், காலச் சுணக்கமின்றி விவரங்களை (data) உட்செலுத்தி முடிவுகளை (results) உடனே பெற்றுக் கொள்ளும் திறமையும் இருக்கவேண்டும்.

கணிப்பொறி இருக்கும்; ஆனால் கையருகில் இருக்காது. வேறோர் அறையிலோ கட்டிடத்திலோ இருக்கும். நிகழ்ச்சி நிரல் இருக்கும்; ஆனால் துளை செய்யப்பட்ட அட்டையிலோ நாடா விலோ இருக்காது. தரப்பட்ட விவரங்கள் இருக்கும்; ஆனால் கணிப்பொறிக்குள் செலுத்தும் அமைப்பில் இருக்காது. கணிப் பொறியை இயக்குபவரிடம் திறமை இருக்கும்; ஆனால் எந்நேரமும் வேலையில் ஈடுபட்டுள்ள கணிப்பொறி எப்பொழுது கிடைக்கும் எனச் சொல்ல முடியாது. அதுமட்டுமா? நேமவரையத்தைக் காட்டிலும் கணிப்பொறியும் துளை செய்யப்பட்ட அட்டைகளும்

விலேயுர்ந்தன. ஆனால் நேமவரையங்கள் அப்படி அல்ல. தாளும், வரைகோலும், படித்தர அளவுகோல்களும் இருந்தால் நினைத்த மாத்திரத்திலேயே நேமவரையத்தை அமைத்து விடலாம்.

ஒரே வாய்பாட்டை அடிப்படையாக வைத்து மிக விரிவான பட்டியல் (table) ஒன்றை அமைப்பதற்குக் கணிப்பொறி காலச் சிக்கனமுள்ளது; திறமைவாய்ந்தது; குறிப்பாக, விரைந்து செயல்படக் கூடியது. ஆனால் வசதியிலும், இயக்கக் கூடிய எளிமையிலும் அது நேமவரையத்துடன் போட்டிபோட முடியாது. நழுவு கணிப்பானைக் காட்டிலும் கூட நேமவரையம் எளிமையானது. எனவேதான் நேமவரையத்தைப் பலரும் பயன்படுத்துகின்றனர். கணிப்பொறியிலிருந்து கிடைக்கும் முடிவுகள் துல்லியமாக இருக்கும். ஆனால் நேமவரையத்தில் அந்த அளவுக்குத் துல்லியத்தை எதிர்பார்க்க முடியாது.

நேமவரையத்தின் குறிக்கோள்கள்

சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண வரைபடம் ஒரு சிறந்த வழியாகும். $x^2 + 2x - 1 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டைத் (quadratic equation) தீர்ப்பதற்கு, $y = x^2$ என்ற பரவளையமும் (parabola) $y = 1 - 2x$ என்ற நேர்கோடும் எங்கு வெட்டிக் கொள்கின்றன என்பதைக் காண ஒரு வரைபடம் வரையவேண்டும். இதே போன்று $x^2 + 2x - 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கு $y = x^2$ என்ற பரவளையமும், $y = 2 - 2x$ என்ற நேர்கோடும் எங்கு வெட்டிக் கொள்கின்றன என்பதைக் காண ஒரு வரைபடம் வரையவேண்டும். இவ்வாறு $x^2 + ax + b = 0$ என்ற அமைப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டுக்கும் தீர்வு காண வெவ்வேறு வரைபடங்கள் தேவைப்படுகின்றன. வெவ்வேறு வரைபடங்கள் அமைக்காமல், ஒரே ஒரு படத்தின் வாயிலாக $x^2 + ax + b = 0$ என்ற அமைப்பிலுள்ள எல்லாச் சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு காண முடியும். இவ்வாறு ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பிலுள்ள சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றிற்கும் ஒரே ஒரு படத்தின் வாயிலாகத் தீர்வு காண வழிவகுப்பது நேமவரையத்தின் ஒரு குறிக்கோள் ஆகும். தீர்வு காண அமைக்கப்படும் அந்தப் படமே நேமவரையம் என அழைக்கப்படும்.

சிக்கலான கோவைகளுக்கு விரைவில் மதிப்பைக் காண உதவுவது நேமவரையத்தின் மற்றொரு குறிக்கோள் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g}\, cb\, H^{\frac{3}{2}}$$

என்னும் ஹாமில்டன் சுமித் வாய்பாட்டை (Hamilton Smith formula) எடுத்துக்கொள்க. இதில்

Q = கலிங்கில் (weir) வழிந்த நீரின் வெளியேற்றம் (discharge), செ. மீ.^{3}/ நொடி

g = ஈர்ப்பு முடுக்கம், 981 செ. மீ. / நொடி^{2}

c = வெளியேற்றக் கெழு (coefficient of discharge)

b = அகலம் (width), செ. மீ.

H = நிலைமட்டம் (head), செ. மீ.

இவ்வாய்பாட்டில் Q, c, b, H என்ற நான்கு மாறிகள் உள்ளன. இந்நான்கு மாறிகளில் ஏதேனும் மூன்றின் மதிப்புகள் தெரிந்தால் நான்காவது மாறியின் மதிப்பை உடனே காண உதவுமாறு ஒரு படம் இருந்தால் எவ்வளவோ வசதியாக இருக்கும். இவ்வசதியை அளிப்பது நேமவரையம் ஆகும்.

அடுத்து $\sin x = a + bx$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்க. இதில் x-இன் மதிப்பும், a, b என்பவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றின் மதிப்பும் கொடுக்கப்பட்டால் கணிதப்பட்டியல்களின் உதவியால், மூன்றாவது மாறியின் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்து விடலாம். ஆனால், a, b என்பனவற்றின் மதிப்புகளுக்கொத்த x-இன் மதிப்பைக் காணவேண்டுமெனில் கணிதப் பட்டியல்களையோ நழுவு கணிப்பானையோ பயன்படுத்தி அவ்வளவு எளிதில் விடை கண்டுபிடிக்க முடியாது. இம்மாதிரியான கணக்குகளுக்கு எளிதில் விடை தந்து உதவுவது நேமவரையத்தின் மூன்றாவது குறிக்கோள் ஆகும்.

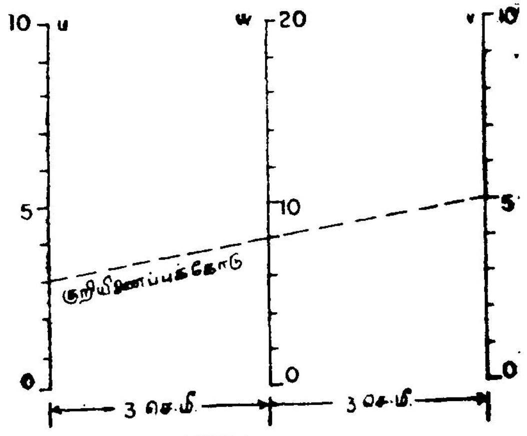
இணைப்பு விளக்கப்படங்கள் (Alignment Charts)

நேமவரையங்கள் யாவற்றிலும் மிக எளிமையானது மூன்று இணையளவுகோல்களைக் (parallel scales) கொண்ட நேமவரையம ஆகும்.

$$u + v = w$$

என்ற மும்மாறிச் சமன்பாட்டுக்கு (three variable equation) அமைக்கப்பட்ட மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையம் படம் 45-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இப்படத்தில் $u = 3$, $v = 5$ என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடானது w-அளவுகோலை 8 என்னும் அளவீட்டில்

வெட்டுவதைக் காணலாம். மேலும், எந்த ஒரு நேர்கோடும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w-அளவுகோல்களை வெட்டுவதைக் காணலாம். இவ்வாறு



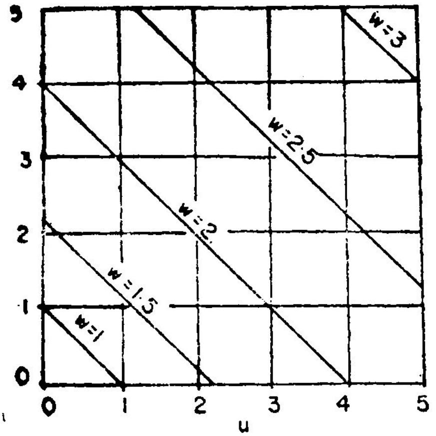
படம் 45

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w-மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைவதால் நேமவரையத்தை இணைப்பு விளக்கப்படம் (alignment chart) எனச் சொல்வதும் உண்டு.

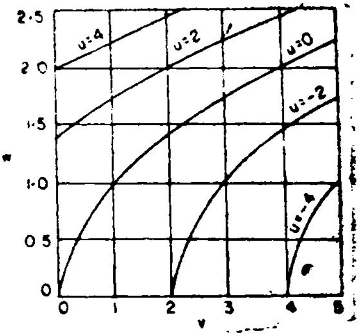
வலையமைப்பு விளக்கப்படங்கள (Network Charts)

கிடைக்கோடுகளும், நிலைக்குத்துக் கோடுகளும் உள்ள ஒரு தாளின் மீது நேர்கோடு அல்லது வளைகோடுகளின் தொகுதியைக் (family) கொண்ட விளக்கப்படம் ஒன்றை $f(u, v, w) = 0$ என்ற மும்மாறிச் சமன்பாட்டுக்கு அமைக்கலாம். இதற்கு வலையமைப்பு விளக்கப்படம் (network chart) எனப்பெயர். இதற்குக் குறுக்கு வெட்டு விளக்கப்படம் (cross-section chart), கார்டீசியன் ஆய விளக்கப் படம் (Cartesian co-ordinate chart) போன்ற வேறு பெயர்களும் உண்டு. u, v, w என்ற மூன்று மாறிகளில் ஒரு மாறியின் மதிப்பை மட்டாயமாகவும் (abscissa), இன்னொரு மாறியின் மதிப்பைக் குத்தாயமாகவும் (ordinate) கொண்டு மூன்றுவது மாறியின் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரு கோடு வரையலாம். இக்கோடு நேர்கோடாகவோ அல்லது வளை கோடாகவோ இருக்கலாம். இவ்வாறு மூன்றுவது மாறியின்

பல்வேறு மதிப்புகளுக்கும் உரிய கோடுகளை வரைந்தால் $f(u, v, w) = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் குறிக்கும் கோடுகளின் தொகுதி (family of lines) ஒன்று கிடைக்கும்.



படம் 46

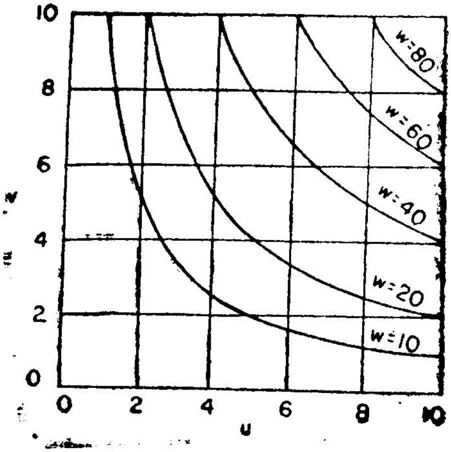


படம் 47

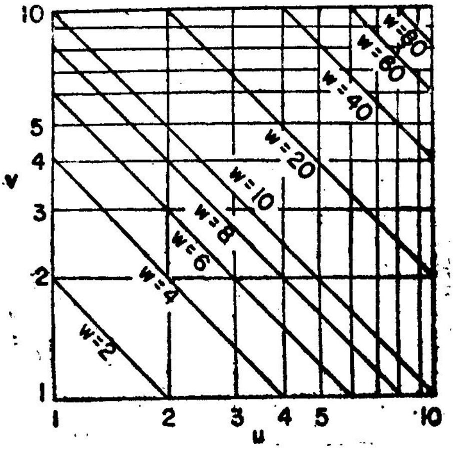
$u + v = w^2$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அமைக்கப்பட்ட வலையமைப்பு விளக்கப்படம் படம் 46-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இதில் u, v-மதிப்புகள் முறையே கிடை அச்சின்மீதும், நிலைக்குத்து அச்சின்மீதும் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இதே சமன் பாட்டுக்கு v-யின் மதிப்பைக் கிடை அச்சின் மீதும், w-வின் மதிப்பை நிலைக்குத்து அச்சின்மீதும் குறித்து வலையமைப்பு விளக்கப்படம் அமைத்தால் படம் 46-இல் உள்ளதுபோல் நேர் கோடுகளின் தொகுதி கிடைக்காமல், பரவளையங்களின் தொகுதி கிடைப்பதைக் காணலாம் (படம் 47).

$uv = w$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு வலைமைப்பு விளக்கப்படம் அமைக்கும் முறைகளை இப்பொழுது காணலாம். u, v- மதிப்புகளை முறையே கிடை அச்சின்மீதும், நிலைக்குத்து அச்சின்மீதும் குறித்தால் மீபரவளையங்களின் (hyperbolas) தொகுதி கிடைக்கும் (படம் 48). இதே சமன்பாட்டை

$$\log u + \log v = \log w$$



படம் 48

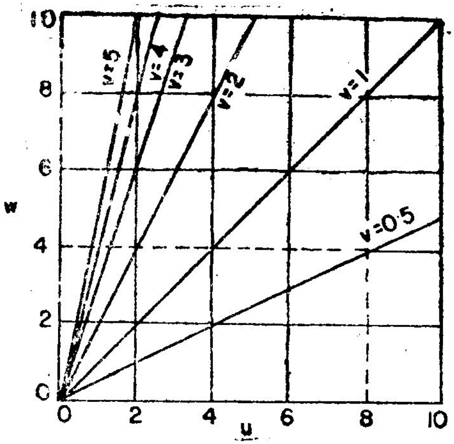


படம் 49

என மடக்கை அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக்கொண்டு, மடக்கை

மடக்கை வரைபடத்தாளில் (log log graph paper) படம் 49-இல் காட்டியுள்ளது போன்றும் வலையமைப்பு விளக்கப்படம் அமைக்கலாம்.

$uv = w$ என்ற சமன்பாட்டை மடக்கை அமைப்பில் மாற்றி எழுதாமல் இதற்கு நேர்கோடுகளின் தொகுதியைக் கொண்ட வலையமைப்பு விளக்கப்படம் அமைக்க வேண்டுமெனில், u-வின் மதிப்பைக் கிடை அச்சின் மீதும், w-வின் மதிப்பை நிலைக்குத்து அச்சின் மீதும் குறிக்கவேண்டும். இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட விளக்கப்படம் படம் 50-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 50

இப்படத்தைப் பயன்படுத்தி $uv = w$ என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காணும் முறையை இப்பொழுது அறிந்து கொள்ளலாம். இப்படத்திலுள்ள கிடைக்கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் w-வின் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கு உரியது. எனவே கிடைக்கோடுகளை w-கோடுகள் என அழைக்கலாம். இதே போன்று நிலைக்குத்துக் கோடுகளை u-கோடுகள் எனலாம். w-கோடுகளுக்கும், u-கோடுகளுக்கும் மேலே, ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கக்கூடிய பல நேர்கோடுகள் அடுக்கி வைக்கப்பட்டுள்ளன போல் தெரிகிறது. இக்கோடுகளை v-கோடுகள் என எண்ணிக் கொள்ளலாம். $u = 8$, $w = 4$ எனில், v-யின் மதிப்பைக் காண்பது எப்படி ? $u = 8$ என்ற நிலைக்குத்துக் கோடும், $w = 4$ என்ற கிடைக் கோடும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $v = 0.5$ என்ற நேர்கோட்டின் மீது இருப்பதால் v-யின் மதிப்பு 0.5 எனத் தெரிகிறது.

இவ்வாறு ஒரு சமன்பாட்டுக்கு அமைக்கப்பட்ட வலையமைப்பு விளக்கப்படத்தில் அச்சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில்

உள்ள u, v, w-மதிப்புகளுக்குரிய மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்வதைக் காணலாம்.

இணைப்பு விளக்கப்படத்தில் ஒவ்வொரு நேர்கோடும் u, v, w இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளைக் கொடுக்கிறது. அதாவது ஒத்த மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டின்மீது அமைகின்றன. வலயமைப்பு விளக்கப்படத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியும் u, v, w இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளைக் கொடுக்கிறது. அதாவது ஒத்த மதிப்புகளுக்குரிய கோடுகள் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இணைப்பு விளக்கப்படம், வலயமைப்பு விளக்கப்படம் என்ற இரண்டையுமே நேமவரையம் எனப் பெருப்பாலோர் கூறுகின்றனர். வலயமைப்பு விளக்கப்படத்தை வரைபடம் என அழைத்தாலே போதும். இணைப்பு விளக்கப்படமானது டி-ஒகேனின் (D'Ocagne) கோட்பாடுகளின் அடிப்படையில் பிறந்ததாகும். இந்நூலில் வரும் நேமவரைவு, நேமவரையம் என்ற சொற்கள் இணைப்பு விளக்கப்படத்தையே குறிக்கின்றன.

9. நேமவரைவு முறைகள் (Nomographic Methods)

ஒரு சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும்பொழுது அதற்குரிய அளவுகோல்களும் குறியிணைப்புக் கோடுகளும் எந்த அமைப்பில் இருக்கவேண்டும் என முடிவு செய்துகொள்ள வேண்டும். அளவுகோல்கள் அமைந்துள்ள கோடுகள் நேர் கோடுகளாகவோ வளைகோடுகளாகவோ இருக்கலாம்; இணையாகவோ ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பனவாகவோ இருக்கலாம்; வட்ட வடிவத்திலோ N வடிவத்திலோ இருக்கலாம்; இன்னும் எத்தனையோ அமைப்புகளில் இருக்கலாம்.

ஒரு சமன்பாட்டில் மாறிகளின் எண்ணிக்கை கூடக்கூட அளவுகோல்களின் எண்ணிக்கை கூடுவதுபோல், குறியிணைப்புக் கோடுகளின் எண்ணிக்கையும் கூடும். எடுத்துக்காட்டாக, நான்கு மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்கான நேமவரையத்தில் இரண்டு குறியிணைப்புக்கோடுகள் இருக்கும். இக்குறியிணைப்புக் கோடுகள் இணைகோடுகளாகவோ வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளாகவோ, அதிலும் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளாகவோ இருக்கலாம். இவ்வாறு பல்வேறு வகையான அமைப்புகளில் அளவுகோல்களும் குறியிணைப்புக் கோடுகளும் இருக்கக் கூடும். இவற்றைப்பற்றிப் பின்வரும் அதிகாரங்களில் விரிவாகக் காணலாம்.

அளவுகோல்களும் குறியிணைப்புக்கோடுகளும் எந்த அமைப்பில் இருக்கவேண்டும் என முடிவு செய்த பின்னர், அளவுகோல்களை எளிதில் அமைப்பதற்கேற்ப அளவுகோல் குணகங்களைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். எல்லா அளவுகோல்களுக்கும் வசதிக்கேற்ப அளவுகோல் குணகங்களைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்வதென்பது இயலாத ஒன்று. ஏனெனில் குறைந்தது ஓர் அளவுகோலுக்கான அளவுகோல் குணகத்தையாவது மற்ற அளவுகோல் குணகங்களிலிருந்து கணக்கிட்டுக் கொள்ளவேண்டியிருக்கும்.

மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்கான நேமவரையத்தில், மூன்றாவது அளவுகோலின் இருப்பிடமும் (position) அளவுகோல் குணகமும் மற்ற இரண்டு அளவுகோல்களின் இருப்பிடங்களையும் அளவுகோல் குணகங்களையும் பொறுத்தன. ஒரு நேமவரையத்தில் அளவுகோல்களை எங்கு அமைக்க வேண்டும், எப்படி அமைக்கவேண்டும் என்பதைக் காணத் தொகுப்பு முறை (synthetic method), பகுப்பு முறை (analytic method) என இரண்டு முறைகள் உள்ளன.

தொகுப்பு முறை (Synthetic Method)

இன்று பொறியியல் துறைகளில் பயன்படுத்தப்படும் நேமவரையங்களில் பெரும்பாலானவை தொகுமுறை வடிவியலின் (synthetic geometry) அடிப்படையில் அமைக்கப்பட்டனவாகும். தொகுமுறை வடிவியல் என்பது பள்ளிகளில் சொல்லித்தரப்படும் தளவடிவியலே ஆகும். வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பொதுப் பண்புகள் போன்ற தளவடிவியலின் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி நேமவரையம் அமைக்கும் முறைக்குத் தொகுப்பு முறை எனப் பெயர். மூன்று முதல் ஒன்பது முடிய உள்ள அதிகாரங்கள் தொகுப்பு முறையில் நேமவரையம் அமைப்பதை விளக்கிக் கூறுகின்றன.

பகுப்பு முறை (Analytic Method)

மும்மாறி சமன்பாடுகளுக்கான நேமவரையத்தில் மாறிகளின் ஒத்த மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அமையும். மூன்று புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அமைவதற்கான கட்டுப்பாட்டைப் (condition) பகுமுறை வடிவியலில் (analytical geometry) படித்திருக்கலாம். இது ஒரு சமன்பாட்டின் அமைப்பில் இருக்கும். இச்சமன்பாட்டை அணிக்

கோவைச் சமன்பாடாகவும் (determinantal equation) மாற்றி யமைத்துக் கொள்ளலாம். இந்த அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு நேமவரையம் அமைக்கும் முறைக்குப் பகுப்புமுறை அல்லது அணிக்கோவை முறை (determinant method) எனப்பெயர். இம்முறையைப்பற்றி இந்நூலின் இறுதி அதிகாரத் தில் விரிவாகப் படிக்கலாம்.

தொகுப்பு, பகுப்பு முறைகளின் ஒப்பீடு

நேமவரைவியலைக் கற்பதில் தொடக்க நிலையில் உள்ளவர் யாவர்க்கும் எளிதில் புரியக் கூடியது தொகுப்பு முறையேயாகும். தொகுப்பு முறையில் ஒரு சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக் கும் பொழுது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இன்னவகையில் இருப்ப தால் அதற்கான நேமவரையம் இன்ன அமைப்பில் இருக்குமென முன்னரே அறிந்துகொள்ளலாம்.

பகுப்பு முறையில், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் அணிக் கோவை அமைப்பைப் (determinantal form) பொறுத்தே நேம வரையம் அமைக்கப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு, நேமவரையம் அமைப்பதற்கேற்ப ஓர் அணிக்கோவை அமைப்பு இருப்பின், அச்சமன்பாட்டை நேமவரையம் அமைப்பதற்கேற்ப பல்வேறு அணிக்கோவை அமைப்புகளில் எழுத முடியும். எனவே பகுப்பு முறையில் ஒரே சமன்பாட்டுக்குப் பல்வேறு வகையான நேமவரையங்கள் அமைக்கமுடியும். சில சமன்பாடுகளில், ஒரு சில மாறிகளுக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்புகள்வரலாம். எடுத்துக் காட்டாக $u + v^2w = u^2v^2 + uvw$ என்ற சமன்பாட்டில் u என்னும் மாறிக்கு u, u^2 என்ற இருசார்புகளும் v என்னும் மாறிக்கு v, v^2 என்ற இருசார்புகளும் உள்ளன. இதுபோன்ற சமன்பாடுகளுக்கு நேமவரையம் அமைக்கப் பகுப்பு முறையே எளியது.

தொகுப்பு முறையில், படித்தர அமைப்பில் (standard form) உள்ள ஒரு சில குறிப்பிட்ட சமன்பாடுகளுக்கு மட்டுமே நேம வரையம் அமைக்கலாம். ஆனால் பகுப்பு முறையில், பெரும்பாலான சமன்பாடுகளுக்கு நேமவரையம் அமைக்கமுடியும். ஒரு சமன் பாட்டுக்குத் தொகுப்பு முறையில் நேமவரையம் அமைக்க முடியு மாயின் அதற்குப் பகுப்பு முறையிலும் நேமவரையம் அமைக்க முடியும். ஆனால் ஒரு சமன்பாட்டுக்குப் பகுப்பு முறையில் நேம வரையம் அமைக்கமுடியுமாயின் அதற்குத் தொகுப்பு முறை இல்லாமற் போகலாம்.

சுருங்கக் கூறின், தொகுப்பு முறை எளிதில் புரியக்கூடியது. படித்தர அமைப்பிலுள்ள சில சமன்பாடுகளுக்கு மட்டும் உரியது. பகுப்பு முறை எல்லா வகைச் சமன்பாடுகளுக்கும் உரிய பொது வான முறையாகும். இம்முறையில் ஒரே சமன்பாட்டுக்குப் பல் வகையான அமைப்புகளில் நேமவரையம் அமைக்கலாம்.

நேமவரையம் அமைப்பதற்குச் சில செயல் முறைக் குறிப்புகள்

நேம வரையத்தின் அளவு பெரிதாக இருப்பின் கிடைக்கக் கூடிய முடிவுகள் துல்லியமாக இருக்கும். துல்லியமான முடிவு களை அவ்வளவாக எதிர்பார்க்கவில்லையெனில் படத்தின் அளவு சிறிதாக இருந்தாலே போதும். சிறிய அளவில் உள்ள நேம வரையங்களே பயன்படுத்துவதற்கு வசதியாக இருக்கும்.

பாடநூல்களிலும் செய்தித் தொகுப்பு நூல்களிலும் உள்ள நேமவரையங்கள் யாவும் அமைப்பு முறையை விளக்குவதற்காக வரையப்பட்டனவாக இருக்கும். அமைப்பு முறையை நன்கு புரிந்துகொண்டு தேவையான அளவுக்கு அந்த நேமவரையங்களை அமைத்துக் கொள்ளலாம். ஆய்வுக் கூடங்களிலோ பெரிய தொழிற்சாலைகளிலோ நாள்தோறும் ஒரே மாதிரியான கணக்கீடுகளைத் திரும்பத் திரும்பச் செய்யவேண்டியிருப்பதால் தேவையான நேமவரையத்தைப் பெரிய அளவில், நீடித்துப் பயன்படும் வகையில் சிறப்பாக அமைத்துக் கொள்ளலாம். இப்படி அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்திலிருந்து கிடைக்கும் முடிவுகள் நழுவு கணிப்பான் நல்குவதைக் காட்டிலும் துல்லியமாக இருக்கும்.

ஒவ்வொரு நேமவரையத்தின் கீழும் அது எந்தச் சமன் பாட்டுக்கு அமைக்கப்பட்டது என எழுதுதல் நல்லது. அளவு கோல்களின் மீது அளவுக் குறியீடுகளையும் அளவீடுகளையும் தெளிவாகக் குறிக்கவேண்டும். அமைத்த நேமவரையத்தை எப்படிப் பயன்படுத்துவது என்பதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டைக் கொடுக்கலாம்.

நேமவரையம் அமைக்கும் பொழுது T-வடிவ வரைகருவி (T-square), மூலைமட்டக் கருவி (set square) முதலியவற்றின் விளிம்புகளும் (edges), செங்கோண அமைப்புகளும் சரியாக உள்ளனவா என்று பார்த்துக் கொள்ளவேண்டும். அளவு கோல்களை மெல்லிய கோடுகளின்மீது அமைப்பதோடு அளவுக் குறியீடுகளையும் மெல்லிய கீறுகளாகக் குறிக்கவேண்டும். அளவுக் குறியீடுகள் நெருக்கமாக இருக்கக் கூடாது. நெருக்கமாக இருப்பின் படத்தில் தெளிவிருக்காது. அளவீடுகள் படிப்பதற்கு எளிய வகையில் இருக்கவேண்டும்.

அமைத்த நேமவரையத்தை நெடிதுநாள் பயன்படுத்த நினைத்தால் தேவையான மதிப்பைக் காணக் குறியிணைப்புக் கோட்டை உண்மையாகவே வரைதல் கூடாது. இப்படி ஒவ்வொரு கணக்கீட்டுக்கும் ஒவ்வொரு கோட்டை வரைந்தாலோ அல்லது தேவையான கணக்கீட்டைச் செய்தவுடன் அதற்குரிய குறியிணைப்புக் கோட்டைத் துடைத்தழித்துவிட்டாலோ படம் பாழாகிவிடும். ஒரு நூலை இழுத்துப் பிடித்து அதைக் குறியிணைப்புக் கோடாகப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். அல்லது ஒரு கண்ணாடித்தாள்மீது மெல்லிய கோடு வரைந்து அதைப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

3. இணையளவுகோல் நேமவரையங்கள்

(Parallel Scale Nomograms)

10. $f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$ என்றவகைச் சமன்பாடு

நேமவரையங்கள் யாவற்றிலும் மிக எளிமையானது மூன்று இணையளவு கோல்களைக் கொண்ட நேமவரையம் ஆகும்.

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$$

என்றவகைச் சமன்பாட்டுக்கு மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையம் அமைக்கலாம். நேமவரையத்தில் எந்த ஒரு நேர்கோடும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w-மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளில் u, v, w-அளவுகோல்களை வெட்டுமாறு, அளவுகோல்களை அமைக்க வேண்டும். u, v-அளவுகோல்களின் மீதுள்ள புள்ளிகளை நேர் கோட்டால் இணைத்து, அதிலிருந்து w-வின் மதிப்பை w-அளவு கோலிலிருந்து கண்டு கொள்வதால் w-அளவுகோலின் இருப் பிடமும் அளவுகோல் குணகமும் u, v-அளவுகோல்களின் இருப் பிடங்களையும் அளவுகோல் குணகங்களையும் சார்ந்தன என்பது தெரிகிறது.

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$$

என்ற சமன்பாட்டில் u, v என்ற மாறிகளின் நெடுக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்க. இச்சமன்பாட்டுக்கு

நோமவரையம் அமைக்கும்பொழுது u, v-அளவுகோல்களின் இருப்பிடங்களையும் அளவுகோல் குணகங்களையும் வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். w-அளவுகோலை எங்கு அமைக்க வேண்டும், அதற்கு எந்த அளவுகோல் குணகத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும் என்பனவற்றிற்கு முதலில் விடை காணவேண்டும். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$u\text{-அளவுகோலுக்கு} \quad x = m_1 f_1(u)$$
$$v\text{-அளவுகோலுக்கு} \quad y = m_2 f_2(v)$$
$$w\text{-அளவுகோலுக்கு} \quad z = m_3 f_3(w)$$

எனக் கொள்க. இங்கு m_1, m_2 என்பனவற்றின் மதிப்புகளை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். m_3-இன் மதிப்பானது m_1, m_2 என்பனவற்றின் மதிப்புகளைப் பொறுத்துள்ளதால், m_3-இன் மதிப்பை விருப்பப்படி தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ள முடியாது.

u, v, w-அளவுகோல்களை மூன்று இணைகோடுகளின் மீது, w-அளவுகோல் u, v-அளவுகோல்களுக்கிடையில் இருக்குமாறு அமைத்துக் கொள்க. சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையிலுள்ள u, v, w-மதிப்புகள் ஒரே நேர்கோட்டின்மீது அமைய வேண்டுமெனில் அளவுகோல் குணகங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன ?

u, v, w-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளுக்குரிய அளவீடுகள் முறையே u_0, v_0, w_0 எனில்

$$f_1(u_0) = 0$$
$$f_2(v_0) = 0$$
$$f_3(w_0) = 0$$

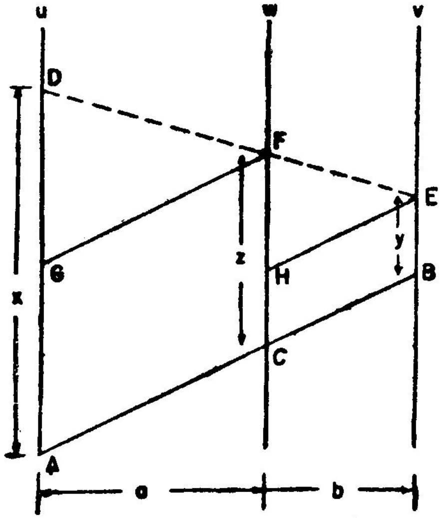
$$\text{எனவே } f_1(u_0) + f_2(v_0) = f_3(w_0)$$

இதிலிருந்து u, v, w-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளுக்கான அளவீடுகள்

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றன எனத் தெரிகிறது. ஆகவே மூன்று அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளும் ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அமையும். u, v, w-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை முறையே A, B, C எனக் கொள்க, A, B, C வழியாகச் செல்லும் நேர்கோடு, அளவுகோல்

களுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை. u, w-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை a செ.மீ. எனவும் w, v-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை b செ.மீ. எனவும் கொள்க. u, v-அளவுகோல்களில் ஏதேனும் இரண்டு அளவீடுகளை இணைக்கும் DE என்ற நேர்கோடு w-அளவு



படம் 51

கோலை F என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும் (படம் 51). D, E, F என்ற புள்ளிகள் முறையே u, v, w-மதிப்புகளைக் குறிப்பதால் $AD = x$; $BE = y$; $CF = z$. AB-க்கு இணையாக E, F என்ற புள்ளிகள் வழியாக முறையே EH, FG என்ற கோடுகள் வரை. H என்ற புள்ளி w-அளவுகோலின்மீதும், G என்ற புள்ளி u-அளவுகோலின் மீதும் இருக்கவேண்டும். படம் 51-இல்,

$$\begin{aligned} GD &= AD - AG \\ &= AD - CF \\ &= x - z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} HF &= CF - CH \\ &= CF - BE \\ &= z - y \end{aligned}$$

GDF, HFE என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{\text{GD}}{\text{HF}} = \frac{a}{b}$$

எனவே $$\frac{x - z}{z - y} = \frac{a}{b}$$

குறுக்குப் பெருக்குவதால், $bx - bz = az - ay$

புறமாற்றத்தால் (transposing), $bx + ay = az + bz$

அதாவது $bx + ay = (a + b)\, z$

ab - ஆல் வகுக்க, $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{(a + b)z}{ab}$$

இதில் x, y, z என்பனவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$\frac{m_1 f_1 (u)}{a} + \frac{m_2 f_2 (v)}{b} = \left(\frac{a + b}{ab}\right) m_3 f_3 (w)$$

இச்சமன்பாடு

$$f_1 (u) + f_2 (v) = f_3 (w)$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்

$$\frac{m_1}{a} = \frac{m_2}{b} = \left(\frac{a + b}{ab}\right) m_3$$

ஒவ்வொரு விகிதத்தின் மதிப்பும் k எனில்

$$a = \frac{m_1}{k} \quad \ldots \quad (1)$$

$$b = \frac{m_2}{k} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{ab}{a + b} = \frac{m_3}{k} \quad \ldots \quad (3)$$

(3)-இல் a, b இவற்றின் மதிப்புகளைப் பதிலிட்டுச் சுருக்கினால்

$$m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

(1)÷(2) எனில் $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a}{b}$$

ஆகவே w-அளவுகோலின் அளவுகோல் குணகம் $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ என்றும் u, v-அளவுகோல்களிலிருந்து w-அளவுகோலுக்குள்ள தூரங்கள் $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் இருக்கும் என்றும் தெரிகிறது. $m_1 : m_2$ என்ற இவ்விகிதத்திற்கு இடப்பெயர்ச்சி விகிதம் (displacement ratio) எனப்பெயர். w-அளவுகோல் u, v-அளவுகோல்களுக் கிடையில் உள்ளதென்பதையும் மூன்று அளவுகோல்களையும் ஒரே திசையில் அமைக்கவேண்டும் என்பதையும் நினைவிற் கொள்க. மூன்று அளவுகோல்களும் இணையாக இல்லையெனில் மேற்கண்டவாறு தொடர்புகள் எதையும் காணமுடியாது. ஏனெனில் முக்கோணங்கள் வடிவொத்தனவாக இருக்கமாட்டா.

DE என்ற குறியிணைப்புக் கோட்டை AB-க்கு இணையாகப் படத்தில் வரைந்து கொண்டால்

$$m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

என்பதை மட்டுமே நிறுவலாம் (prove). ஆனால்,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a}{b}$$

என்பதை நிறுவமுடியாது. DE என்ற நேர்கோடு AB-க்கு இணையானால்

$$x = y = z$$

$$\text{எனவே } m_1 f_1(u) = m_2 f_2(v) = m_3 f_3(w)$$

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3 w$$

$$\text{என்பதால் } \frac{m_3}{m_1} + \frac{m_3}{m_2} = 1$$

$$\text{ஆகவே, } m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$x = y = z$ என்பதால் $\frac{x - z}{z - y} = \frac{a}{b}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து

$$\frac{a}{b} = \frac{o}{o}$$

எனக் கிடைக்கிறது. $\frac{o}{o}$ என்பது தேரா அமைப்பு (indeterminate form) ஆதலால் $\frac{a}{b} = \frac{m_1}{m_2}$ என நிறுவ முடியாது.

$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$ என்றவகைச் சமன்பாட்டுக்கு இணையளவுகோல் நேமவரையம் அமைக்க நினைவிற்கொள்ள வேண்டியன வருமாறு:

(1) u, v-அளவுகோல்களை எளிதாக அமைப்பதற்கேற்ப m_1, m_2 என்பனவற்றின் மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். m_3-இன் மதிப்பை $m_3 = \frac{m_1 \; m_2}{m_1 + m_2}$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து கணக்கிட்டுக் கொள்ளவேண்டும்.

(2) w-அளவுகோல் u, v-அளவுகோல்களுக்கிடையில் இருக்குமாறும், u, v-அளவுகோல்களிலிருந்து w-அளவுகோலுக்குள்ள தூரங்கள் $m_1 : m_2$ என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறும், u, v, w-அளவுகோல்களுக்கென மூன்று இணைகோடுகளை வரையவேண்டும்.

(3) u, v-அளவுகோல்களை அமைத்து முடித்ததும் w-அளவுகோலை அமைக்கத் தொடங்கவேண்டும். இதற்கு முதற் கட்டமாகப் பொருத்தக்கோடு (matching line) என ஒரு கோட்டை வரைந்துகொள்ளவேண்டும். பொருத்தக் கோட்டை வரைவதற்கு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w-மதிப்புகளின் ஒரு தொகுதியைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்ட u, v, w மதிப்புகளை முறையே u_1, v_1, w_1 எனக் கொள்க. இப்பொழுது u_1, v_1 என்ற அளவீடுகளை இணைக்கும் நேர்கோடு w-அச்சை அதாவது w-அளவுகோலுக்குரிய கோட்டை வெட்டுமிடத்தில் w_1 என அளவீடு செய்யவேண்டும். பின்னர் w-அளவுகோலை அமைத்து முடிக்க வேண்டும். u_1, v_1, w_1 என்ற அளவீடுகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்கே பொருத்தக்கோடு எனப் பெயர். எளிமைக்காக, கிடை அடிக்கோட்டைப் (horizontal base line) பொருத்தக் கோடாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம்,

(4) அளவுகோல் நீளங்கள் யாவும் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லை. நேமவரையம் பார்ப்பதற்கு ஓரளவு அழகாகவும் இதில் கிடைக்கக் கூடிய முடிவுகள் ஓரளவு துல்லியமாகவும் இருப்பதற்கு அளவுகோல் நீளங்கள் ஏறத்தாழச் சமமாயிருந்தால் போதுமானது.

(5) அளவுகோல்களின் கீழ்முனைகளோ மேல் முனைகளோ ஒரே மட்டத்தில் இருக்கவேண்டிய தேவையில்லை. வசதிக்காக, கீழ்முனைகள் ஒரே மட்டத்தில் இருக்குமாறு அளவுகோல்களை அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

சில சமன்பாடுகள் $f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$ என்ற அமைப்பில் இருக்காது. ஆனால் அவற்றை மாற்றியமைத்து மேற்கண்ட அமைப்புக்குக் கொண்டுவரலாம். இப்படிப்பட்ட சிலவகைச் சமன்பாடுகளுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும் முறைகளை இப்பொழுது காணலாம்.

(1) $f_1(u) - f_2(v) = f_3(w)$ என்றவகைச் சமன்பாடு.

இச்சமன்பாட்டை

$$f_1(u) + [-f_2(v)] = f_3(w)$$

என மாற்றியமைத்துக் கொள்ளலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1(u)$$
$$y = m_2 [-f_2(v)]$$
$$z = m_3 f_3(w)$$

எனக் கொள்க. $f_2(v)$ ஒரு கூடும் சார்பெனில் $[-f_2(v)]$ ஒரு குறையும் சார்பாகும். எனவே அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழாகக் கூடிக் கொண்டு செல்லும்.

(2) $f_1(u) f_2(v) = f_3(w)$ என்றவகைச் சமன்பாடு.

இச்சமன்பாட்டை

$$\log f_1(u) + \log f_2(v) = \log f_3(w)$$

என மாற்றியமைத்துக் கொள்ளலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \log f_1(u)$$
$$y = m_2 \log f_2(v)$$
$$z = m_3 \log f_3(w)$$

எனக் கொள்க. u, v, w-அளவுகோல்களை அமைக்க மடக்கை அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தவேண்டும்.

(3) $\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w)$ என்றவகைச் சமன்பாடு.

இச்சமன்பாட்டை

$$\log f_1(u) + [-\log f_2(v)] = \log f_3(w)$$

என மாற்றியமைத்துக்கொள்ளலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \log f_1(u)$$
$$y = m_2 [-\log f_2(v)]$$
$$z = m_3 \log f_3(w)$$

எனக் கொள்க. u, v, w-அளவுகோல்களை அமைக்க மடக்கை அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தவேண்டும். $f_2(v)$ ஒரு கூடும் சார்பெனில் $[-\log f_2(v)]$ ஒரு குறையும் சார்பாகும். எனவே v-அளவுகோலில் அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லும்.

மேற்கூறிய மூன்று வகைக்கும் $m_3 = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. மேலும், w-அளவுகோல் u, v-அளவுகோல்களுக்கிடையில் இருக்கும். u, w-அளவுகோல்களின் கிடைத்தூரத்திற்கும் w, v-அளவுகோல்களின் கிடைத்தூரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் $m_1 : m_2$ ஆகும்.

$f_1(u) - f_2(v) = f_3(w)$ என்றவகைச் சமன்பாட்டை

$$f_1(u) = f_2(v) + f_3(w)$$

என்ற அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக்கொண்டும் நேமவரையம் அமைக்கலாம். இப்பொழுது u-அளவுகோல் v, w-அளவுகோல்களுக்கிடையில் இருக்கும். u, v, w-அளவுகோல்களின் அளவுகோல் குணகங்கள் முறையே m_1, m_2, m_3 எனில் $m_1 = \dfrac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$. v, w-அளவுகோல்களிலிருந்து u-அளவுகோலுக்குள்ள தூரங்கள் $m_2 : m_3$ என்ற விகிதத்தில் இருக்கும். u, v இவற்றின் நெடுக்கங்கள் மட்டுமே கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் m_1, m_2 இவற்றின் மதிப்புகளை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொண்டு, m_3-இன் மதிப்பை $m_1 = \dfrac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து கண்டுபிடித்துக்கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு m_1, m_2 இவற்றின் மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளும்பொழுது $m_1 < m_2$ என்றிருக்குமாறு பார்த்துக்கொள்ளவேண்டும். ஏனெனில் $m_1 = m_2 \left(\dfrac{m_3}{m_2 + m_3}\right)$.

இதில் $\left(\dfrac{m_3}{m_2 + m_3}\right) < 1$. ஆகவே $m_1 < m_2$.

u, v இவற்றின் நெடுக்கங்களிலிருந்து w-வின் நெடுக்கத்தைக் கண்டுபிடித்துக் கொண்டு, பின்னர் m_2, m_3 இவற்றின் மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்தும் m_1-இன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12

$2u + v = w$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. $u\,(0 - 100)$; $v\,(0 - 50)$.

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1\ (2\ u)$$
$$y = m_2\ v$$
$$z = m_3\ w$$

எனக் கொள்க.

u-வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= 2\ m_1\ (100 - 0)$
$= 200\ m_1$

$m_1 = \frac{1}{20}$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

v-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= m_2\ (50 - 0)$
$= 50\ m_2$

$m_2 = \frac{1}{5}$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

$$m_3 = \frac{m_1\ m_2}{m_1 + m_2}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{20}\right)\ \left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{20} + \frac{1}{5}}$$
$$= \frac{1}{25}$$

எனவே குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

u-க்கு $x = 0.1\ u$
v-க்கு $y = 0.2\ v$
w-க்கு $z = 0.04\ w$

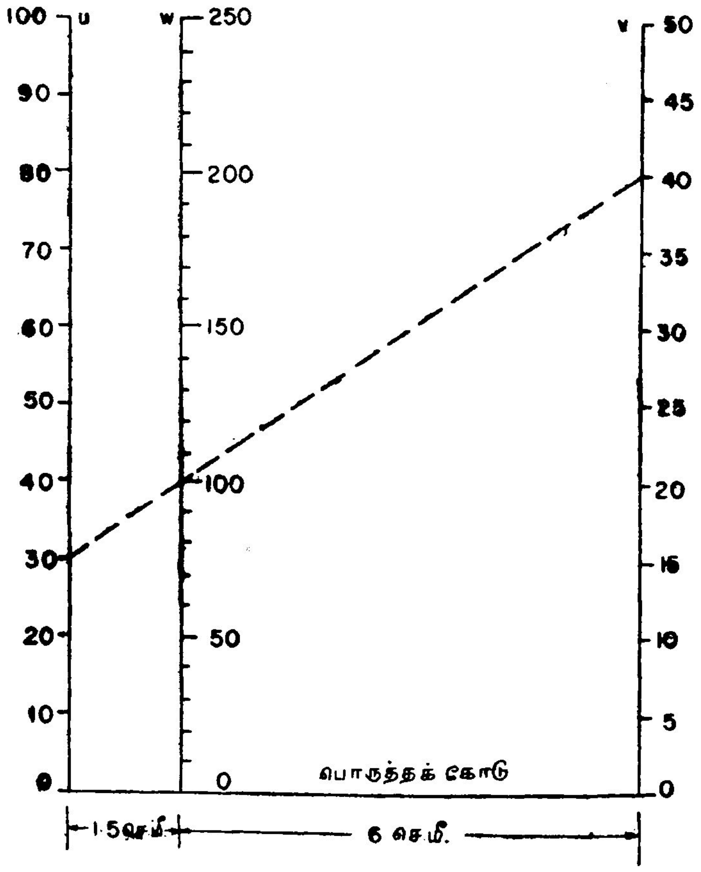
ஆகும்.

u - அளவுகோலில் ஒரு செ. மீ. நீளம் 10 அலகுகளையும், v - அளவுகோலில் ஒரு செ.மீ. நீளம் 5 அலகுகளையும், w-அளவு கோலில் ஒரு செ.மீ. நீளம் 25 அலகுகளையும் குறிக்கின்றன.

இடப்பெயர்ச்சி விகிதம் $= m_1 : m_2$
$= 1 : 4$

எனவே u, w-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 1.5 செ. மீ. ஆகவும், w, v-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 6 செ.மீ. ஆகவும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். u, v -அளவு கோல்களை முதலில் அமைக்கவேண்டும் (படம் 52). w-அளவு

கோலை அமைப்பதன் முதற்கட்டமாகப் பொருத்தக் கோட்டினை வரையவேண்டும். $u = o$, $v = o$ எனில் $w = 0$. எனவே $u = 0$, $v = 0$ என்ற இரு புள்ளிகளையும் ஒரு நேர்கோட்டால் இணைத்து



படம் 52

அந்தக்கோடு w-அச்சை வெட்டுமிடத்தில் 0 என அளவீடு செய்ய வேண்டும். பிறகு ஒரு செ.மீ. நீளம் 25 அலகுகளைக் குறிக்குமாறு w-அளவுகோலை அமைத்து முடிக்கவேண்டும். $u = 100$, $v = 50$ என்ற மேல் எல்லைகளுக்கான புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு w-அச்சை எங்கு வெட்டுகிறதோ அந்தப் புள்ளிவரை w-அளவு கோலில் அளவீடுகள் செய்தால் போதுமானது.

$u=30$, $v=40$ எனில் w-வின் மதிப்பைக்காண, அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் $u=30$, $v=40$ என்ற புள்ளி களைச் சேர்க்கும் குறியிணைப்புக்கோட்டை வரையவேண்டும். இக் கோடு w-அச்சை 100 என்ற அளவீட்டில் வெட்டுவதால் தேவை யான w-வின் மதிப்பு 100 ஆகும.

எடுத்துக்காட்டு 13

H = 14,803 + 75.8 V — 167.4 A என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. இதில்

H = அனல்மிகு நிலக்கரியின் (anthracite coal) வெப்ப மதிப்பு (thermal value)

V = எளிதில் ஆவியாகி எரியக்கூடிய பருப்பொருளின் (matter) நூற்றுவீதம் (percentage), (1 - 100)

A = சாம்பலின் நூற்றுவீதம் (0 - 28).

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நேமவரையம் அமைப்பதற் கேற்ப

$$(14,803 + 75.8\ V) + (-167.4\ A) = H$$

என எழுதிக்கொள்க. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1\ (14,803 + 75.8\ V)$$
$$y = m_2\ (-167.4\ A)$$
$$z = m_3\ H$$

எனக்கொள்க.

V-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = 75.8\ m_1\ (10 - 1) = 9\ (75.8)\ m_1$$

$m_1 = \dfrac{1}{75.8}$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்வதே நல்லது. ஏனெனில் V - அளவுகோலின் குறியீட்டுக் குணகம் 1 எனக் கிடைக்கிறது. அத்துடன் அளவுகோலின் நீளமும் 9 செ.மீ. எனத் தாளில் அடங்கக்கூடிய அளவில் உள்ளது. சார்பின் எல்லைவேறு பாட்டைக் கண்டுபிடிக்கும்பொழுது மாறிலி உறுப்பான 14,803-ஐ விட்டுவிடலாம். ஏனெனில் மாறிலி உறுப்பு எதுவாயிருப்பினும் எல்லைவேறுபாடு மாறாது.

A-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = 167.4\, m_2\, (28 - 0) = 28\, (167.4)\, m_2$$

அளவுகோல் நீளங்கள் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லை. எனவே வசதிக்காக, $m_2 = \frac{3}{1674}$ என எடுத்துக்கொள்க. எனவே A-அளவுகோலின் நீளம் 8.4 செ.மீ. ஆகும்.

$$m_3 = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{75.8}\right)\left(\frac{1}{558}\right)}{\frac{1}{75.8} + \frac{1}{558}}$$

$$= \frac{1}{633.8}$$

$$= 0.001578.$$

எனவே குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$x = V + \frac{14803}{75.8}$ (மாறிலி உறுப்பைச் சுருக்கத் தேவையில்லை)

$y = -\,0.3\, A$

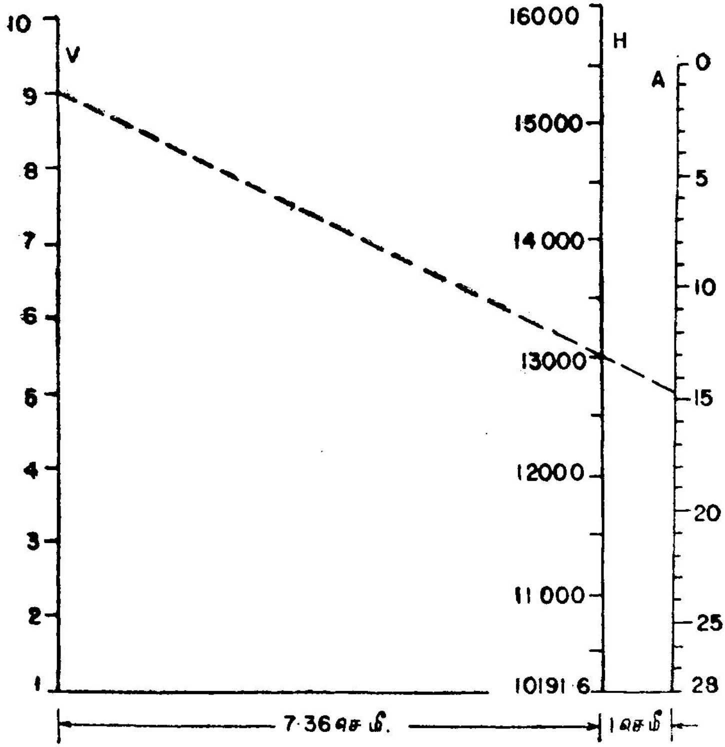
$z = 0.001578\, H$

ஆகும். V-அளவுகோலில் ஓர் அலகு ஒரு செ. மீட்டராலும், A-அளவுகோலில் ஓர் அலகு 0.3 செ. மீட்டராலும், H-அளவுகோலில் ஓர் அலகு 0.001578 செ. மீட்டராலும் குறிக்கப்படும்.

$$\text{இடப்பெயர்ச்சி விகிதம்} = m_1 : m_2 = 558 : 75.8$$

எனவே H, A-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை ஒரு செ.மீ. எனவும், V, H-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை $\frac{558}{75.8}$ அதாவது 7.36 செ. மீ. எனவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். V, H-அளவுகோல்களில் அளவீடுகள் கீழிருந்து மேலாகவும், A-அளவுகோலில் அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழாகவும்

கூடிக்கொண்டு செல்லும். V-அளவுகோலின் கீழ்முனையில் *1* என்ற அளவீடும், A-அளவுகோலின் கீழ்முனையில் *28* என்ற அளவீடும் இருக்குமாறு, V, A-அளவுகோல்களை அமைக்க வேண்டும் (படம் *53*). H-அளவுகோலை அமைப்பதற்கு முன்னர் ஒரு பொருத்தக்கோடு வரைந்து அந்தக்கோடு H-அச்சை வெட்டும் இடத்தில் அதற்குரிய H-இன் மதிப்பை அளவீடு செய்ய

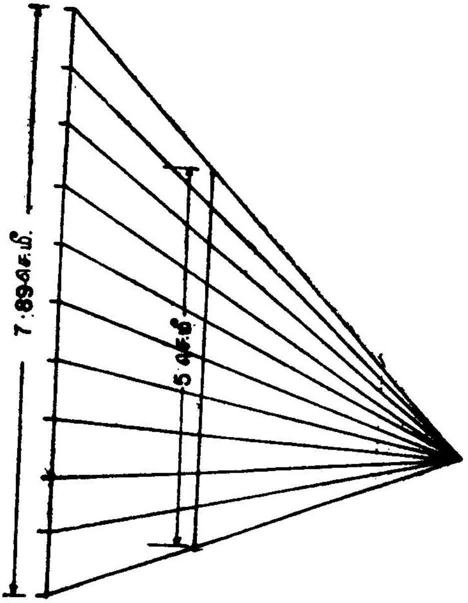


படம் *53*

வேண்டும். V = *1*, A = *28* எனில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து H = *14,803* + *75.8* — (*167.4*) *28* அதாவது *10,191.6*. எனவே V = *1*, A = *28* என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு H-அச்சை வெட்டுமிடத்தில் *10,191.6* என அளவீடு செய்யவேண்டும். வசதிக்காக, கிடை அடிக்கோடு பொருத்தக் கோடாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. H = *11,000* என்பதற்கான புள்ளிக்கும் H = *10,191.6* என்ற புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை H-அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம்.

$$\text{மேற்சொன்ன தூரம்} = 0.001578\,(11{,}000 - 10{,}191.6)$$
$$= 1.276 \text{ செ.மீ.}$$

எனவே H-அளவுகோலின் மீது H = *10,191.6* என்ற புள்ளியி லிருந்து *1.276* செ.மீ. தூரத்தை மேல்நோக்கி அளந்து அந்தப் புள்ளிக்கு *11,000* என அளவீடு செய்யவேண்டும். பின்னர் *1.578* செ.மீ. நீளம் H-இன் *1000* அலகுகளைக் குறிக்குமாறு H-அளவுகோலின்மீது *12,000, 13,000,......* என்ற அளவீடுகளைச் செய்க. V = *10*, A = *0* என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு H-அச்சை வெட்டும் புள்ளிவரை, H-அளவுகோலில் அளவீடுகள் செய்தால் போதுமானது.



படம் *54*

H-அளவுகோலில் *12,000, 13,000, 14,000, ...* போன்ற அளவீடுகள் செய்ய ஒவ்வொரு தடவையும் *1.578* செ.மீ. நீளத்தை அளக்க வேண்டியுள்ளது. இதனால் பிழை (error) ஏற்பட வாய்ப்பு உண்டு. எனவே இணை கோடுகள் முறை அல்லது புள்ளிவழிக்கோடுகள் முறையைப் பயன்படுத்தி *7.89* செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டை *5* சம பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொண்டு, பின்னர் இதை H-அளவுகோல் அமைக்கப் பயன் படுத்திக் கொள்ளலாம். H-அளவுகோலில் *500* அலகுகளுக்கு

ஒரு முறை அளவுக்குறியீடுகள் தேவைப்பட்டால் 7.89 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு நேர்கோட்டை 10 சம பகுதிகளாகப் பிரித்துக் கொள்ளவேண்டும். எனவே 10 சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட 5 செ. மீ. நீளமுள்ள அளவுகோலை முதன்மை அளவுகோலாகக் கொண்டு, புள்ளிவழிக் கோடுகள் முறையில் 7.89 செ.மீ. நீளத்தை 10 சம பகுதிகளாகப் படம் 54-இல் காட்டியபடி பிரித்துக்கொள்க. இதைப் பயன்படுத்தி H-அளவுகோலை எளிதில் அமைக்கலாம்.

V = 9, H = 13,000 எனில் A = 14.85 என்பதை அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் உள்ள குறியிணைப்புக் கோடு காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 14

$$P = \frac{RI^2}{500}$$ என்ற வாய்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை.

இங்கு

P = ஓர் ஒற்றைநிலை (single phase) மாறுமின்னோட்டத்திற்கான (alternating current) திறன் இழப்பு (power loss), கிலோ வோல்ட்டு ஆம்பியர் (kilovolt ampere)

R = மின்தடை (resistance), (1-60) ஓம் (ohm)

I = மின்னோட்டம் (current), (10-400) ஆம்பியர்.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை மடக்கை அமைப்பில் மாற்றிக் கொள்க. எனவே

$$\log R + 2 \log I = \log P + \log 500$$

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \log R$$
$$y = m_2 (2 \log I)$$
$$z = m_3 (\log P + \log 500)$$

எனக் கொள்க.

R-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= m_1 [\log 60 - \log 1]$
$= 1.7782\ m_1$

$m_1 = 5$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

I-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= 2m_2$ [log *400* — log *10*]

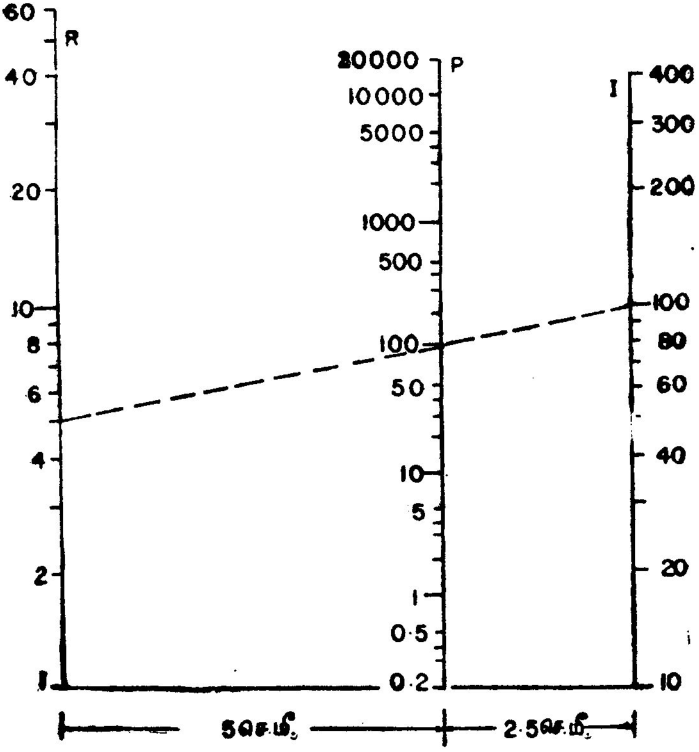
$= 2\,(1.6021)\ m_2$

$m_2 = 2.5$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

$$m_3 = \frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{5\,(2.5)}{5 + 2.5}$$

$$= \frac{5}{3}$$



படம் 55

மடக்கை அளவுகோல்களுக்கான அளவுகோல் குணகங்களைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளும்பொழுது இயன்றவரை 2.5, 5, 10, 15 20 என்ற குறியீட்டுக் குணகங்கள் கிடைக்குமாறு பார்த்துக்

கொள்வது நல்லது. ஏனெனில் மேற்சொன்ன குறியீட்டுக் குணகங்களுக்கு அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோல்கள் எளிதில் கிடைக்கக் கூடியன. இவை தவிர வேறு குறியீட்டுக் குணங்க களுக்கு மடக்கை அளவுகோல்கள் தேவைப்பட்டால் விகிதசம விளக்கப்படமுறையில் அமைத்துக்கொள்ளலாம். m_1, m_2 இவற்றின் மதிப்புகளை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்டாலும் m_3-ஐ அளவுகோல் குணகமாகக்கொண்ட அளவுகோலுக்கும் எளிய குறியீட்டுக் குணகம் கிடைக்குமெனச் சொல்வதற்கில்லை.

இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

R-க்கு $x = 5 \log R$

I-க்கு $y = 5 \log I$

P-க்கு $z = \frac{5}{3} (\log P + \log 500)$

ஆகும். இடப்பெயர்ச்சி விகிதம் $= m_1 : m_2$

$= 2 : 1$

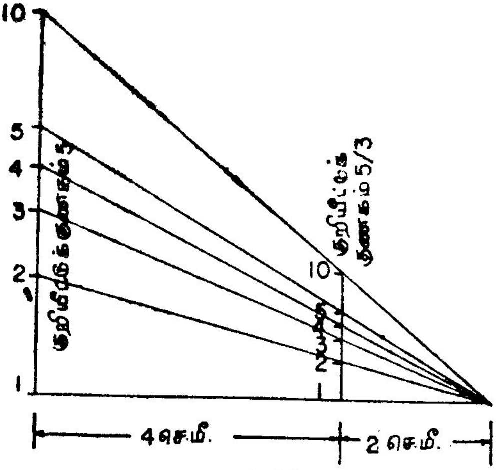
எனவே R, P-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 5 செ.மீ. ஆகவும் P, I-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 2.5 செ.மீ. ஆகவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். 5-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலைப் பயன் படுத்தி R, I-அளவுகோல்களை எளிதில் அமைத்துவிடலாம் (படம் 55). P-அளவுகோலை அமைக்க $\frac{5}{3}$-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலின் ஒரு சுற்றைப் படம் 56-இல் காட்டியவாறு விகிதசம விளக்கப்பட முறையில் அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். $\frac{5}{3}$ -ஐக் குறியீட்டுக் குணக மாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோல் மீது மடிப்பு விழுமாறு இந்த அளவுகோல் அமைக்கப்பட்ட துண்டுத்தாளை மடித்து, P-அச்சின்மீது அந்த மடிப்பு படியுமாறு செய்து, வேண்டிய அளவீடுகளைக் குறித்துக் கொள்ளலாம், P-அளவுகோலை அமைக்கத் தொடங்குமுன் பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$R = 1, \quad I = 10$ எனில் $P = \frac{(10)^2}{500}$

$= 0.2$

எனவே R = 1, I = 10 என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு P-அச்சை வெட்டும் இடத்தில் 0.2 என அளவீடு

செய்யவேண்டும். பின்னர் P-அளவுகோலை $\frac{5}{3}$-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி அமைக்க வேண்டும். R = *60*, I = *400* என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு P-அச்சை வெட்டும் புள்ளிவரை, P-அளவு கோலில் அளவீடுகள் செய்யவேண்டும்.



படம் *56*

P = *100*, R = *5* எனில் I = *100* என்பதை அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் வரையப்பட்டுள்ள குறியிணைப்புக் கோட்டிலிருந்து தெரிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு *8*-இல், எந்தக் கோட்டின்மீது *f*-அளவு கோலை அமைக்கவேண்டுமோ, அந்தக்கோட்டின்மீது நேரடியாகவே விகிதசம விளக்கப்பட முறையில் அந்த அளவுகோல் அமைக்கப்பட்டது. இவ்வாறு செய்வதால் தேவையற்ற கோடுகளைப் பின்னர் துடைத்தழிக்கவேண்டியிருக்கும். இதனால் படம் பாழாக நேரிடும். மேலும் விகிதசம விளக்கப்பட முறையை நேரடியாகப் பயன்படுத்தும்பொழுது முதன்மை அளவுகோல் தாளின் அளவுக்குள் அடங்காமல் போகலாம். எனவேதான், வேண்டிய அளவுகோல் ஒரு மடக்கை அளவுகோலாக இருப்பின், அதன் ஒரு சுற்றை மட்டும் ஒரு துண்டுத் தாளில் அமைத்துக் கொண்டு அதையே திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்திக் கொள்வது நல்லது. வேண்டிய அளவுகோல் ஒரு சீர் அளவுகோலாக இருப்பின் அதை ஒரு குறிப்பிட்ட நீளத்திற்கு மட்டும் அமைத்துக்

கொண்டு, அதையே திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

சில கணக்குகளில், அமைக்கப்பட வேண்டிய அளவுகோல்களில் சில சீர் அளவுகோலாகவோ மடக்கை அளவுகோலாகவோ இல்லாமல் இருபடி அளவுகோலாகவோ இருபடிமூல அளவுகோலாகவோ முப்படி அளவுகோலாகவோ தலைகீழ் அளவுகோலாகவோ கோணச் சார்புக்கான அளவுகோலாகவோ அல்லது வேறுவிதமான அளவுகோலாகவோ இருக்கக்கூடும். பின்வரும் மூன்று எடுத்துக்காட்டுகளும் இவ்வகையான அளவுகோல்கள் வரும்பொழுது எப்படி நேமவரையத்தை அமைக்க வேண்டும் என்பதை விளக்கிக் காட்டுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 15

வட்ட நேர்க் கூம்பின் (right circular cone) சுழல் ஆரம் (radius of gyration)

$$k^2 = \frac{3r^2}{20} + \frac{h^2}{10}$$

என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது. இதில்

k = சுழல் ஆரம், செ. மீ.
r = கூம்பின் ஆரம், (8–14) செ.மீ.
h = கூம்பின் உயரம், (10–15) செ.மீ.

இவ்வாய்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை.

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \left(\frac{3}{20}\right)$$

$$y = m_2 \left(\frac{h^2}{10}\right)$$

$$z = m_3\, k^2$$

எனக் கொள்க.

r–இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = \frac{3m_1}{20}(14^2 - 8^2)$$

$$= 19.8\ m_1$$

$m_1 = 2/3$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே r-அளவு கோலின் குறியீட்டுக் குணகம் 0.1 ஆகும்.

h-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = \frac{m_2}{10}(15^2-10^2)$$
$$= 12.5\ m_2$$

$m_2 = 1$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

$$m_3 = \frac{m_1\ m_2}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{\left[\frac{2}{3}\right](1)}{\frac{2}{3}+1}$$

$$= 0.4$$

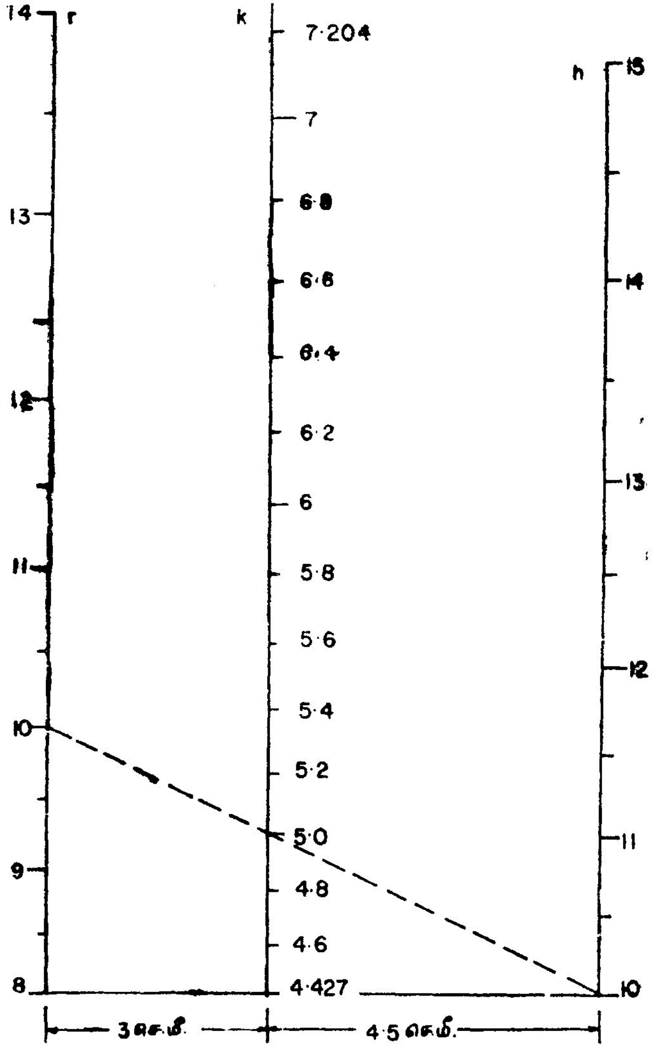
இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 0.1\ r^2$$
$$y = 0.1\ h^2$$
$$z = 0.4\ k^2$$

ஆகும். இடப்பெயர்ச்சி விகிதம் $= m_1 : m_2$
$= 2 : 3$

எனவே r, k-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 3செ.மீ. எனவும், k, h-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 4.5 செ.மீ. எனவும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். மூன்று அளவுகோல்களும் இருபடி அளவுகோல்கள் ஆகும். வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைக் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகளிலிருந்து கணக்கிட்டுத்தான் மூன்று அளவுகோல்களையும் அமைக்க வேண்டும். அட்டவணைகள் 3, 4, 5 இவற்றில் முறையே r, h, k-அளவுகோல்களுக்கான தூரங்களின் கணக்கீடுகள் தரப்பட்டுள்ளன.

செ.மீ., மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி எடுத்துக்காட்டு 3-இல் விளக்கியவாறு r, h-அளவு கோல்களை எளிதில் அமைக்கலாம் (படம் 57). அட்டவணை 3-இன் இறுதி நிரலில் காணப்படும் எண்கள், r-அளவுகோலின் 8 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களை



படம் 57

யும், அட்டவணை 4-இன் இறுதி நிரலில் காணப்படும் எண்கள் h-அளவுகோலில் 10 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடு களுக்குள்ள தூரங்களையும் செ. மீட்டரில் குறிக்கின்றன.

அட்டவணை 3

r	r^2	r^2-8^2	$0.1\,(r^2-8^2)$
8.0	64.00	0	0
8.5	72.25	8.25	0.825
9.0	81.00	17.00	1.700
9.5	90.25	26.25	2.625
10.0	100.00	36.00	3.600
10.5	110.25	46.25	4.625
11.0	121.00	57.00	5.700
11.5	132.25	68.25	6.825
12.0	144.00	80.00	8.000
12.5	156.25	92.25	9.225
13.0	169.00	105.00	10.500
13.5	182.25	118.25	11.825
14.0	196.00	132.00	13.200

k - அளவுகோலை அமைக்கத் தொடங்குமுன், பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

$r = 8$, $h = 10$ எனில், $k^2 = \frac{3}{20}(64) + \frac{1}{10}(100)$

$= 19.6$

எனவே $k = \sqrt{19.6}$

$= 4.427$

எனவே $r = 8$, $h = 10$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு k - அச்சை வெட்டுமிடத்தில் 4.427 என அளவீடு செய்ய வேண்டும். பின்னர் k-அளவுகோலை அமைப்பதற்கு 4.427 என்ற

அளவீட்டிலிருந்து வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைக் கொடுக்கும் அட்டவணை ஒன்றை அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும். k-அளவுகோலில் எந்த அளவீடுவரை அளவுக்குறி யிடவேண்டும் என்பதைக் கண்டுபிடிக்க k-யின் பெருமத்தைக் காண்க.

$r = 14,\ h = 15$ எனில் $k^2 = \frac{3}{20}(196) + \frac{1}{10}(225)$

$= 51.9$

எனவே k-யின் பெருமம் $= \sqrt{51.9}$

$= 7.204$

எனவே 7.204 என்ற அளவீடு வரையிலாவது k-அளவுகோலில் குறிக்கவேண்டும்.

அட்டவணை 4

h	h^2	$h^2 - 10^2$	$0.1\,(h^2 - 10^2)$
10.0	100.00	0	0
10.5	110.25	10.25	1.025
11.0	121.00	21.00	2.100
11.5	132.25	32.25	3.225
12.0	144.00	44.00	4.400
12.5	156.25	56.25	5.625
13	169.00	69.00	6.900
13.5	182.25	82.25	8.225
14.0	196.00	96.00	9.600
14.5	210.25	110.25	11.025
15.0	225.00	12 .00	12.500

அட்டவணை 5-இன் இறுதி நிரலில் காணப்படும் எண்கள் k-அளவுகோலில் 4.427 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடு களுக்குள்ள தூரங்களைச் செ.மீட்டரில் குறிக்கின்றன. r, h - அளவு கோல்களை அமைத்ததுபோல் செ.மீ., மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப் பட்ட சீர் அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி, k-அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும்.

அட்டவணை 5

k	k^2	$k^2 - 19.6$	$0.4(k^2-19.6)$
4.427	19.60	0	0
4.6	21.16	1.56	0.624
4.8	23.04	3.44	1.376
5.0	25.00	5.40	2.160
5.2	27.04	7.44	2.976
5.4	29.16	9.56	3.824
5.6	31.36	11.76	4.704
5.8	33.64	14.04	5.616
6.0	36.00	16.40	6.560
6.2	38.44	18.84	7.536
6.4	40.96	21.36	8.544
6.6	43.56	23.96	9.584
6.8	46.24	26.64	10.656
7.0	49.00	29.40	11.760
7.204	51.90	32.30	12.920

$r = 10$, $h = 10$ எனில் $k = 5$ என்பதை அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் வரையப்பட்டுள்ள குறியிணைப்புக்கோட்டிலிருந்து அறிந்து கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 16

$$\log p = \log S - \frac{1922}{t + 273} + 6.3486$$

என்னும் சமன்பாட்டில்

p = அம்மோனியாவின் (ammonia) பகுதி அழுத்தம் (partial pressure), (10 - 100) மி. மீ. பாதரசம்

S = அம்மோனியாவின் செறிவு (concentration), (10 - 70) கிராம் / 1000 கிராம் நீர்

t = வெப்பநிலை, (10 - 40)° C

இச்சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் ஒன்று அமை.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\frac{1922}{t+273} - 6.3486 = \log S - \log p$$

என்ற அமைப்பில் எழுதிக்கொள்க. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \log S$$
$$y = m_2 (-\log p)$$
$$z = m_3 \left[\frac{1922}{t+273} - 6.3486\right]$$

எனக் கொள்க.

S-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (\log 70 - \log 10) = 0.8451\, m_1$$

$m_1 = 10$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

p-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 (\log 100 - \log 10) = m_2$$

$m_3 = 10$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

$$m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(10)(10)}{10+10} = 5$$

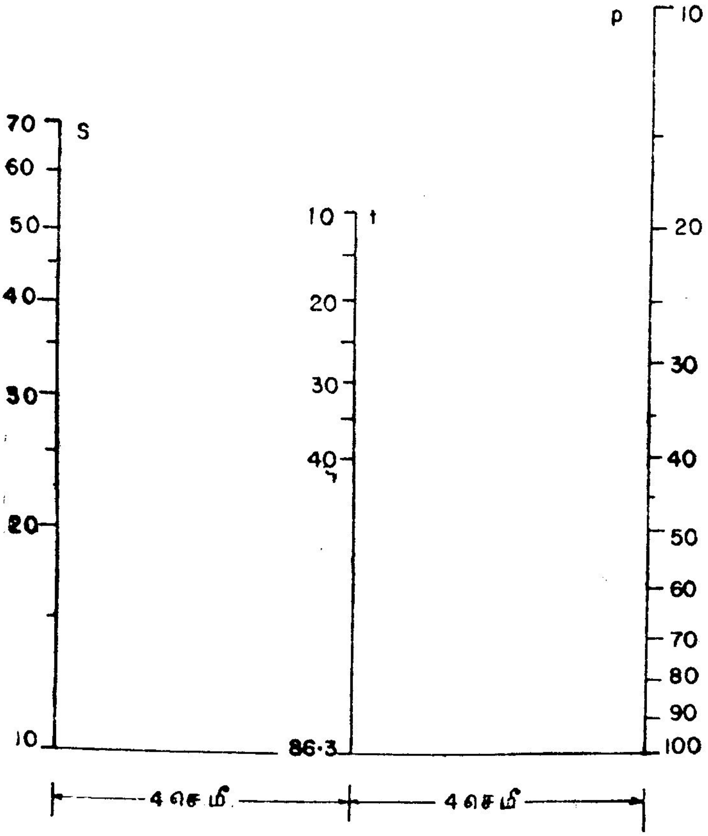
எனவே குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 10 \log S$$
$$y = -10 \log p$$
$$z = 5\left[\frac{1922}{t+273} - 6.3486\right]$$

அதாவது $z = \dfrac{9610}{t+273} - 31.743$

ஆகும். இடப் பெயர்ச்சி விகிதம் $= m_1 : m_2 = 1 : 1$

எனவே S, *t*-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தையும் *t*, *p*-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தையும் 4 செ.மீ. என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.



படம் 58

S, *p*-அளகோல்கள் இரண்டையும் 10-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி எளிதில் அமைத்துவிடலாம். S-அளவுகோலில் அளவீடுகள் கீழிருந்து மேலாகவும், *p*-அளவுகோலில் அவை மேலிருந்து கீழாகவும் கூடிக்கொண்டு செல்லுமாறு, S, *p*-அளவுகோல்களை அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும் (படம் 58). S-அளவுகோலின் கீழ்முனையில் 10 என்ற அளவீடும், *p*-அளவுகோலின் கீழ்முனையில் 100 என்ற அளவீடும் இருக்கவேண்டும்.

t அளவுகோலை அமைக்க வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்கான தூரங்களைக் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கண்டுபிடித்து அட்டவணைப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும். *t*-அளவுகோலில் எந்த அளவீடு முதல் எந்த அளவீடு முடியக் குறிக்கவேண்டும் என்பதற்கு *t*-யின் சிறுமத்தையும் பெருமத்தையும் கண்டுபிடிக்க வேண்டும் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து

$$t = \left[\frac{1922}{6.3486 + \log S - \log p} \right] - 273$$

t சிறுமமாயிருக்க, $(6.3486 + \log S - \log p)$ பெருமமாயிருக்க வேண்டும். இதற்கு S-இன் மிகுந்த மதிப்பையும், *p*-யின் குறைந்த மதிப்பையும் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். எனவே *t*-யின் சிறுமம்.

$$= \left[\frac{1922}{6.3486 + \log 70 - \log 10} \right] - 273$$

$$= \frac{1922}{7.1937} - 273$$

$$= -5.8$$

இதேபோல, *t*-யின் பெருமத்திற்கு S-இன் குறைந்த மதிப்பையும், *p*-யின் மிகுந்த மதிப்பையும் எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும்.

$$t\text{-யின் பெருமம்} = \left[\frac{1922}{6.3486 + \log 10 - \log 100} \right] - 273$$

$$= \frac{1922}{5.3486} - 273$$

$$= 86.3$$

எனவே *t*-அளவுகோலில் —5.8 முதல் 86.3 முடிய அளவீடுகள் செய்யவேண்டும். ஆனால் *t*-யின் நெடுக்கம் 10°C முதல் 40°C முடிய எனக் கணக்கில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. செயல் முறையில் பயன்படும் வெப்பநிலை 10°C முதல் 40°C முடியவேதான் இருக்கும். எனவே *t*-அளவுகோலில் 10 முதல் 40 முடிய அளவீடு செய்தாலேபோதும். *t*-அளவுகோலை அமைக்கத் தொடங்குமுன் பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். எளிமைக்காக, பொருத்தக்கோடு இடை அடிக்கோடாக இருப்பது நல்லது.

$S = 10, p = 100$ எனில் $t = 86.3$ என முன்பே கணக்கிடப் பட்டுள்ளது. எனவே $S = 10, p = 100$ என்ற புள்ளிகளை இணைக் கும் நேர்கோடு t-அச்சை வெட்டுமிடத்தில் உள்ள t-யின் மதிப்பு 86.3 ஆகும். எனவே t-அளவுகோலில் 86.3 என்ற அளவீட்டி லிருந்து வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைக் கொடுக்கும் அட்டவணையை அமைத்துக்கொள்க. t-அளவுகோலில் t என்ற அளவீட்டுக்கு 86.3 என்ற அளவீட்டிலிருந்து உள்ள தூரம்

$$= \left(\frac{9610}{t + 273} - 31.743\right) - \left(\frac{9610}{86.3 + 273} - 31.743\right)$$

$$= \frac{9610}{t + 273} - 26.75$$

எனவே 10 முதல் 40 முடிய உள்ள t-யின் மதிப்புகளுக்குரிய $\left(\frac{9610}{t + 273} - 26.75\right)$ என்பதன் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். இவை அட்டவணை 6-இன் இறுதி நிரலில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 6

t	$\frac{9610}{t+273}$	$\frac{9610}{t+273} - 26.75$
10	33.96	7.21
15	33.37	6.62
20	32.80	6.05
25	32.25	5.50
30	31.72	4.97
35	31.20	4.45
40	30.70	3.95

.மீ+மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி, t-அளவுகோலின் 86.3 என்ற அளவீட்டுக்கான புள்ளியிலிருந்து அட்டவணை 6-இன் இறுதி நிரலில் உள்ள தூரங்களை அளந்து, t-அளவுகோலை அமைத்து முடிக்கவேண்டும்.

$\left(\frac{9610}{t+273} - 31.743 \right)$ ஒரு குறையும் சார்பு (decreasing function) என்பதால் t-அளவுகோலில் அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழாகக் கூடிக் கொண்டு செல்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 17

$H = \frac{w \cos^2 \beta}{\pi}$ என்ற வாய்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. இதில்

H = கிடை அழுக்கம் (horizontal thrust), கி.கி.

w = எடை $(1 - 20)$ கி.கி.

β = கோணம் $(0^\circ - 60^\circ)$

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை மடக்கை அமைப்பில்

$$\log H + \log \pi = \log w + 2 \log (\cos \beta)$$

என எழுதிக் கொள்க. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \log w$$

$$y = m_2 [2 \log (\cos \beta)]$$

$$z = m_3 [\log H + \log \pi]$$

எனக் கொள்க.

w-வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= m_1 (\log 20 - \log 1)$
$= 1.301\ m_1$

$m_1 = 10$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

β-வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= 2\ m_2 [\log (\cos 0^\circ) - \log (\cos 60^\circ)]$
$= 2\ m_2 [\log 1 - \log 0.5]$
$= 0.6021\ m_2$

$m_2 = 20$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. $\log (\cos \beta)$-வின் எல்லை வேறுபாட்டைக் காண்கையில் $\log (\cos 60^\circ) - \log (\cos 0^\circ)$ எனக் கொள்ளாததன் காரணம் யாதெனில் $\log (\cos 0^\circ) > \log (\cos 60^\circ)$.

$$m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(10)(20)}{10 + 20}$$

$$= \frac{20}{3}$$

இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 10 \log w$$

$$y = 40 \log (\cos \beta)$$

$$z = \frac{20}{3}(\log H + \log \pi)$$

ஆகும். இடப்பெயர்ச்சி விகிதம் $= m_1 : m_2$

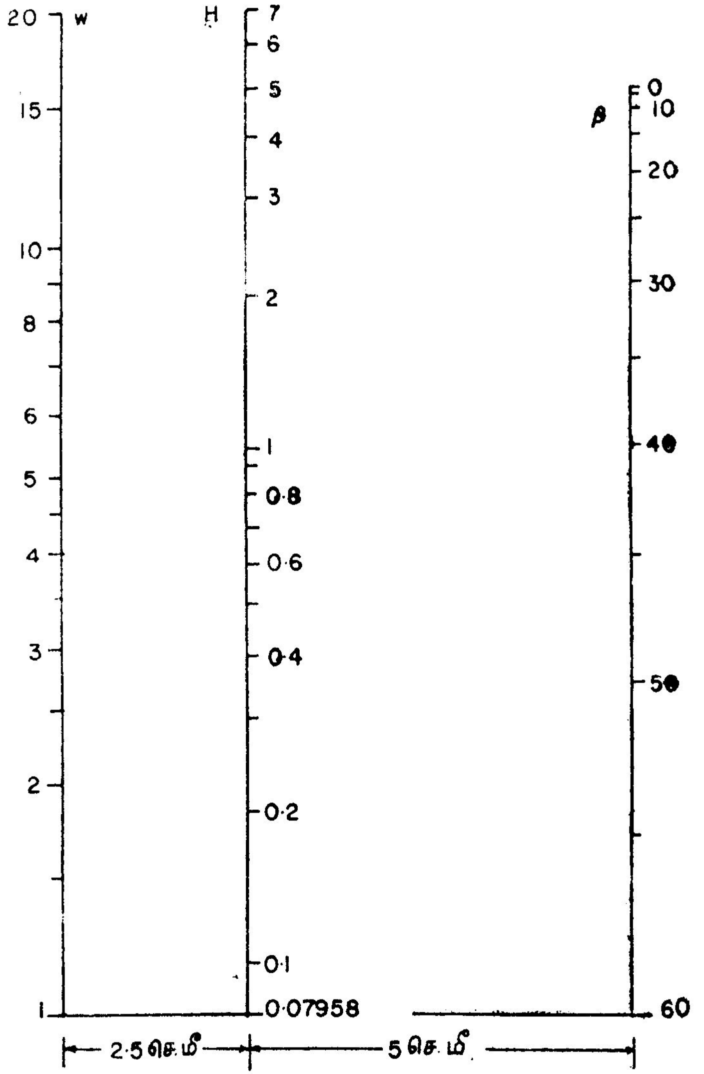
$= 1 : 2$

எனவே w, H-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 2.5 செ.மீ. எனவும், H, β-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 5 செ.மீ. எனவும் கொள்ளலாம்.

w-அளவுகோலை, 10-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலின் உதவியால் மிக எளிதில் அமைத்து விடலாம் (படம் - 59). ஆனால் β-அளவுகோலை இதுவரை பயன்படுத்திய மடக்கை அளவுகோலின் உதவியால் அமைக்க முடியாது. β-அளகோலை அமைக்க, சென்ற இரு எடுத்துக்காட்டு களில் கண்டதுபோல் β-வின் வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைக் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிட்டு அட்டவணைப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில், β-வின் மதிப்பு கூடக்கூட $\log (\cos \beta)$ -வின் மதிப்பு குறைந்து கொண்டே செல்கிறது. எனவே $\log (\cos \beta)$ ஒரு குறையும் சார்பாகும். ஆகவே β-அளவு கோலில் மேலிருந்து கீழாக அளவீடுகள் கூடிக்கொண்டு செல்லும். எனவே β-அளவுகோலில் 60 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைக் கணக்கிட்டு வைத்துக்கொள்வது நல்லது. கணிதப் பட்டியல்களில் $\log (\cos \beta)$-வின் மதிப்புகளைக் காணலாம். அட்டவணை 7-இன் இறுதி நிரலில் உள்ள எண்கள் β-அளவுகோலில் 60 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடு களுக்குள்ள தூரங்களைக் குறிக்கின்றன. 60 என்ற அளவீடு β-அளவு

கோலின் கீழ்முனையில் இருக்குமாறு, செ.மீ., மீ.மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலின் உதவியால் β-அளவுகோலை அமைத்து முடிக்கவேண்டும்.



படம் 59

அட்டவணை 7

β (பாகை)	log (cos β)	log(cosβ)-log(cos60°)	40 [log(cos β) -log (cos 60°)]
60	$\bar{1}.6990$	0	0
55	$\bar{1}.7586$	0.0596	2.384
50	$\bar{1}.8081$	0.1091	4.364
45	$\bar{1}.8495$	0.1505	6.020
40	$\bar{1}.8843$	0.1853	7.412
35	$\bar{1}.9134$	0.2144	8.576
30	$\bar{1}.9375$	0.2385	9.540
25	$\bar{1}.9573$	0.2583	10.332
20	$\bar{1}.9730$	0.2740	10.960
15	$\bar{1}.9849$	0.2859	11.436
10	$\bar{1}.9934$	0.2944	11.776
5	$\bar{1}.9983$	0.2993	11.972
0	0	0.3010	12.040

H-அளவுகோலை அமைக்கத் தொடங்குமுன் பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். $w = 1, \beta = 60$ எனில்

$$H = \frac{\cos^2 60^\circ}{\pi}$$

$$= 0.07958$$

எனவே $w = 1, \beta = 60$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு H-அச்சை வெட்டுமிடத்தில் 0.07958 என அளவீடு செய்ய வேண்டும். H-அளவுகோலில், 0.1 என்ற அளவீட்டுக்கும் 0.07958 என்ற அளவீட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரம்

$$= \frac{20}{3} (\log 0.1 - \log 0.07958)$$

$$= \frac{20}{3} (\bar{1}.0000 - \bar{2}.9008)$$

$$= 0.661 \text{ செ.மீ.}$$

எனவே 0.661 செ.மீ. நீளத்தை 0.07958 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மேல்நோக்கி அளந்து, H = 0.1 என அளவீடு செய்ய வேண்டும். விகித சம விளக்கப்பட முறையில் $\frac{20}{3}$ -ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலின் ஒரு சுற்றை அமைத்துக்கொண்டு அதன் உதவியால் H-அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும்.

நேமவரையம் அமைக்கப்பட வேண்டிய ஒரு சமன்பாட்டில் ஒரே ஒரு மாறியின் நெடுக்கம் மட்டும் மற்ற எல்லா மாறிகளின் நெடுக்கங்களைக் காட்டிலும் மிகக் குறுகியதாக இருக்கலாம். இம்மாதிரியான சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைப்பது எப்படி எனப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு விளக்குகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 18

ஒரு கூம்பின் கன அளவு $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது. இதில்

V = கூம்பின் கன அளவு, செ.மீ.^{3}

r = அடிப்பக்க ஆரம், (5 - 100) செ.மீ.

h = கூம்பின் உயரம், (4.5 - 5.5) செ.மீ.

இவ்வாய்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை.

r-இன் நெடுக்கம் மடக்கை அளவுகோலின் ஒரு சுற்றுக்கும் மிகுதியானது. ஆனால் h-இன் நெடுக்கம் ஒரு சுற்றின் ஒரு சிறிய பகுதியே ஆகும். எல்லா எடுத்துக்காட்டுகளிலும் செய்ததுபோல் அளவுகோல் நீளங்கள் ஏறத்தாழச் சமமாக இருக்குமாறு அளவுகோல் குணகங்களை முதலில் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\log V + \log \left(\frac{3}{\pi}\right) = 2 \log r + \log h$$

என மடக்கை அமைப்பில் மாற்றிக் கொள்க. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 (2 \log r)$$

$$y = m_2 (\log h)$$

$$z = m_3 \left[\log V + \log \left(\frac{3}{\pi} \right) \right]$$

எனக் கொள்க.

r-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= 2\, m_1 [\log 100 - \log 5]$
$= 2.6021\, m_1$

$m_1 = 5$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே அளவுகோல் நீளம் ஏறத்தாழ 13 செ.மீ. ஆகும்.

h-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= m_2 [\log 5.5 - \log 4.5]$
$= m_2 [0.7404 - 0.6532]$
$= 0.0872\, m_2$

அளவுகோல் நீளம் 13 செ.மீ. ஆக இருக்க வேண்டுமெனில்

$$m_2 = \frac{13}{0.0872}$$
$$= 149.1$$

எனவே $m_2 = 150$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். *h*-அளவுகோலை அமைப்பதற்கு, 4.5 என்ற அளவீட்டிலிருந்து வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைக் கொடுக்கும் அட்டவணையை அமைத்துக் கொள்ளலாம். *r*, V-அளவுகோல்களுக் கிடையே உள்ள தூரத்திற்கும், V, *h*-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் $= m_1 : m_2$
$= 1 : 30$

எனவே *r*, V- அளவுகோல்களுக்கிடையே 'உள்ள தூரத்தை 0.3 செ.மீ. எனவும், V, *h*- அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 9 செ.மீ. எனவும் எடுத்துக்கொண்டு நேமவரையத்தை அமைக்கலாம். ஆனால் இவ்வமைப்பில் *r*, V- அளவுகோல்கள் இரண்டும் மிகமிக நெருக்கமாக உள்ளன. எனவே நேமவரையத்தி லிருந்து கிடைக்கும் முடிவுகளில் பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்பு உண்டு. மேற் சொன்ன அமைப்பில் *h*-அளவுகோலை அமைக்கத் தூரங்களை வேறு கணக்கிட வேண்டும். மேலும் 4.5 முதல் 5.5 முடிய உள்ள அளவுகோலை 13 செ.மீ. நீளத்தில் அமைக்கும் அளவுக்குத் துல்லியம் தேவையில்லை. எனவே *h*-அளவுகோலின் நீளத்தைக்

குறைவாக எடுத்துக்கொண்டு நேமவரையத்தை அமைப்பது நல்லதெனத் தெரிகிறது. இதனால் r, V-அளவுகோல்களின் நெருக்கத்தைத் தவிர்ப்பதோடு, h-அளவுகோலையும் எளிதில் அமைக்கலாம். இதற்கு m_2-இன் மதிப்பை 20 என எடுத்துக் கொள்க.

$$\text{இப்பொழுது} \quad m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(5)(20)}{5 + 20}$$

$$= 4$$

எனவே குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 10 \log r$$

$$y = 20 \log h$$

$$z = 4 \left[\log V + \log \left(\frac{3}{\pi} \right) \right]$$

ஆகும். r, V-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்திற்கும், V, h-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் 1 : 4 ஆதலால் இத் தூரங்களை முறையே 1.5 செ.மீ., 6 செ.மீ. என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

h- அளவுகோலின் நீளம் r- அளவுகோலின் நீளத்தைவிட மிகக் குறைவாக இருப்பதால், பொதுவாக h-அளவுகோலை, r-அளவுகோலுக்கு இணையான கோட்டின் மையத்தில் படம் 60-இல் காட்டியவாறு அமைப்பது நல்லது. r, h- அளவுகோல்களை அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோல்களின் உதவியால் எளிதில் அமைத்துவிடலாம். V-அளவுகோலை அமைக்கத் தொடங்குமுன், பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும். $r = 5$, $h = 4.5$ எனில்

$$V = \frac{\pi (5)^2 (4.5)}{3}$$

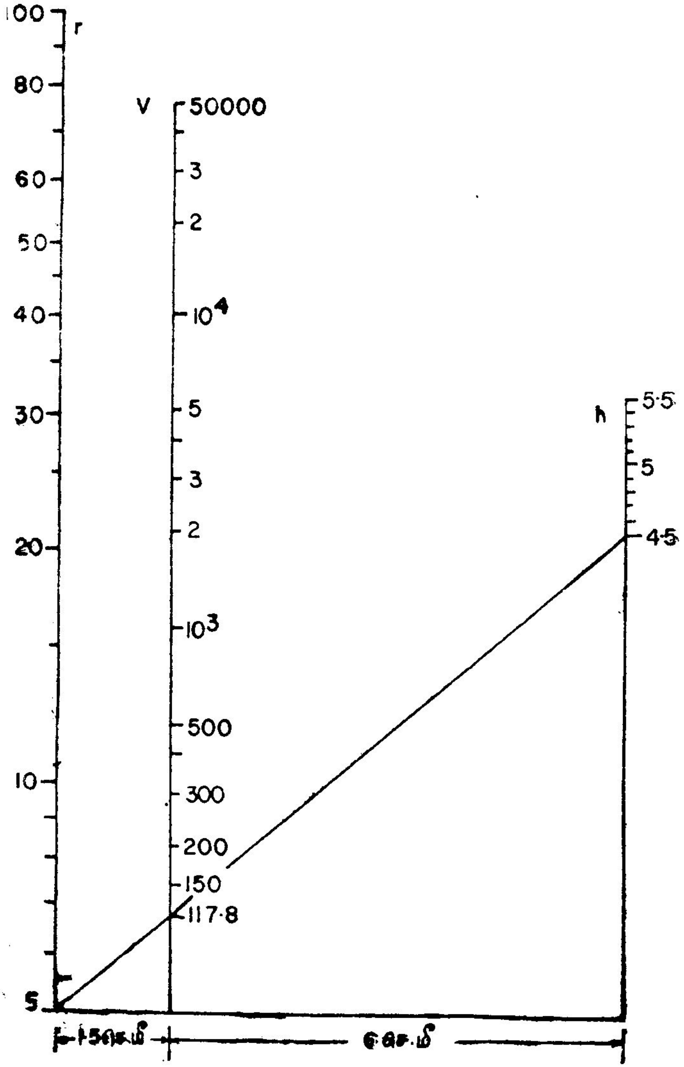
$$= 117.8$$

எனவே $r = 5$, $h = 4.5$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோடு V-அச்சை வெட்டுமிடத்தில் 117.8 என அளவீடு செய்ய வேண்டும். V-அளவுகோலில் 150 என்ற அளவீட்டுக்கும் 117.8 என்ற அளவீட்டுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம்

$$= 4 (\log 150 - \log 117.8)$$

$$= 0.4196 \text{ செ.மீ.}$$

எனவே 117.8 என்ற அளவீட்டிலிருந்து 0.4196 செ.மீ. தூரத்தை V-அச்சின் மீது மேல் நோக்கி அளந்து 150 என அளவீடு செய்ய வேண்டும். பின்னர் 4-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட



படம் 60

அடுக்கை அளவுகோலை ஒரு துண்டுத்தாளில் அமைத்துக்கொண்டு அதைப் பயன்படுத்தி V-அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும்.

11. $f_1(u) + f_2(v) + f_3(w) + \ldots\ldots = f_n(t)$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

$$f_1(u) + f_2(v) + f_3(w) = f_4(t)$$

என்ற நான்கு மாறிச் சமன்பாட்டுக்கு (four variable equation) நேமவரையம் அமைக்கும் முறையை முதலில் அறிந்து கொள்ளலாம். இச்சமன்பாட்டை

$$f_1(u) + f_2(v) = q$$
$$q + f_3(w) = f_4(t)$$

என்னும் இரண்டு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். இதில் q என்பது ஓர் இடைநிலை மாறி (intermediate variable) ஆகும். இதைத் துணைமாறி (auxiliary variable) எனலாம்.

$$f_1(u) + f_2(v) = q$$

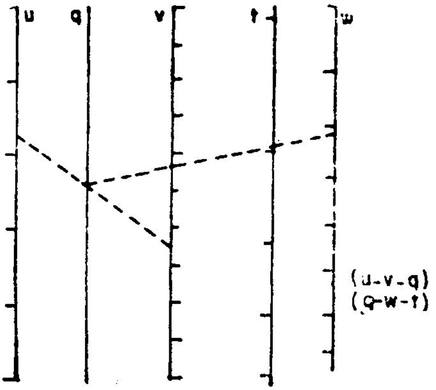
என்னும் சமன்பாட்டுக்கு, மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையத்தை முதலில் அமைக்க வேண்டும். பிறகு

$$q + f_3(w) = f_4(t)$$

என்னும் சமன்பாட்டுக்கு மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையத்தை அமைக்கவேண்டும். u, v, q என்ற மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில் அமைத்த q-அளவுகோலையே, q, w, t என்ற மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்திலும் பயன்படுத்தவேண்டும். q-என்னும் மாறி ஓர் இடைநிலை மாறி ஆதலால், q-அளவுகோலின் மீது அளவுக்குறியீடுகள் செய்யத் தேவையில்லை. எனினும் q-அளவுகோலின் அளவுகோல் குணகத்தைக் கணக்கிட வேண்டும். ஏனெனில், t-அளவுகோலின் அளவுகோல் குணகமும், இருப்பிடமும், q-அளவுகோலின் அளவுகோல் குணகத்தைப் பொறுத்தன. கொடுக்கப்பட்ட நான்குமாறிச் சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தின் அமைப்பு படம் 61-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இந்த நேமவரையத்தை அமைக்கப் பயன்படுத்தும் q-அளவுகோலைத் துணையளவுகோல் (auxiliary scale) எனலாம்.

u, v, w இவற்றின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால், t-யின் மதிப்பைக் காண்பது எப்படி? u, v-மதிப்புகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக்கோட்டை முதலில் வரையவேண்டும். பின்னர் இக் குறியிணைப்புக்கோடு q-அச்சை வெட்டும் புள்ளியையும், w-வின் மதிப்புக்கான புள்ளியையும் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோட்டை

வரைய வேண்டும். இந்த இரண்டாவது குறியிணைப்புக்கோடு t-அச்சை வெட்டுமிடத்தில் உள்ள அளவீடே தேவையான t-யின் மதிப்பாகும். நேமவரையத்தில் q-அளவுகோல் ஓர் இயக்குமையக்



படம் 61

கோடாகப் (pivotal line) பயன்படுவதால் இதை இயக்குமைய அளவுகோல் (pivotal scale) என்றும் கூறலாம்.

எந்த மூன்று மாறிகளை இணைத்து ஒரு மும்மாறிச் சமன்பாடு அமைக்கப்படுகிறதோ, அந்த மூன்று மாறிகளின் மதிப்புகளை இணைத்துத்தான் ஒரு குறியிணைப்புக்கோட்டை வரைய வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, படம் 61-இல் உள்ள அமைப்பில், v, q, w என்ற மாறிகளின் மதிப்புகளை இணைத்து ஒரு குறியிணைப்புக் கோட்டை வரையக் கூடாது. எந்தெந்த மாறிகளின் மதிப்புகளை இணைத்துக் குறியிணைப்புக்கோடுகளை வரையவேண்டும் என்பதைப் படத்தின் ஒரு மூலையில் எழுதிக் கொள்வது நல்லது.

$$f_1(u) + f_2(v) + f_3(w) = f_4(t)$$

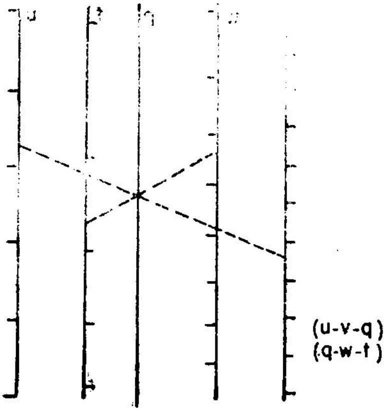
என்ற சமன்பாட்டை

$$f_1(u) + f_2(v) = q$$
$$f_4(t) - f_3(w) = q$$

என்ற அமைப்பில் இரு சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொண்டால் படம் 62-இல் காட்டியுள்ளதுபோல் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கலாம்.

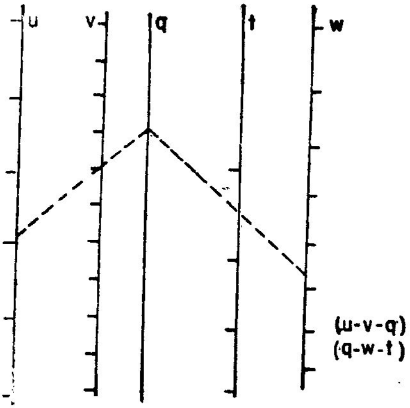
கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$-f_1(u) + q = f_2(v)$$
$$q + f_3(w) = f_4(t)$$



படம் 62

என்ற அமைப்பில் இரு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டால், படம் 63-இல் காட்டியுள்ளதுபோல் நேம வரையம் அமைக்கலாம்.



படம் 63

முதலிரண்டு அமைப்புகளைக் காட்டிலும் மூன்றுவது அமைப் பில் தெளிவு இருப்பதால் தேவையான மதிப்புகளை எளிதில் படிக்

கலாம். முதலிரண்டு அமைப்புகளில் ஒரு சில அளவுகோல்களை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட குறியிணைப்புக் கோடுகள் வெட்டுவதால் சரியான மதிப்பைப் படிப்பதில் குழப்பம் வரலாம். எனவே வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு எந்தெந்த மாறிகளுக்குரியது என்பதை நன்கு அறிந்துகொள்ள வேண்டும்.

$$f_1(u)\, f_2(v)\, f_3(w) = f_4(t)$$

என்ற வகைச் சமன்பாட்டை

$$\log f_1(u) + \log f_2(v) + \log f_3(w) = \log f_4(t)$$

என மடக்கை அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக் கொண்டு, பின்னர் இதை q என்னும் துணைமாறியைப் பயன்படுத்தி இரண்டு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு மேலே விளக்கிய வாறு நேமவரையம் அமைக்கலாம்.

நான்கு மாறிச் சமன்பாட்டுக்கு அமைத்த இணையளவுகோல்களைக்கொண்ட நேமவரையத்தைச் செயல் முறையில் பயன் படுத்தும் பொழுது கீழ்க்கண்டவாறு செய்யலாம். ஒரு கண்ணாடித் தாள் மீது மெல்லிய கோடு ஒன்று வரைந்து அதைப் பயன்படுத்து முதல் குறியிணைப்புக் கோட்டை அமைக்கவேண்டும். அக்கோடு q-அச்சை வெட்டும் இடத்தில் ஓர் ஊசி முனையால் அழுத்திக் கொண்டு, மெல்லிய கோடு இரண்டாவது குறியிணைப்புக்கோடாக வருமாறு கண்ணாடித்தாளைச் சுழற்றவேண்டும். இவ்வாறு செய் வதால் குறியிணைப்புக்கோடுகளை உண்மையில் வரையத் தேவை யில்லை. இதனால் அமைக்கப்பட்ட நேமவரையம் நெடிது நாள் பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 19

$T = 0.5\ E + 2\ W + 0.2\ A$ என்ற வாய்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. இதில்

T = மொத்த மதிப்பெண் (ma;k)
E = ஆண்டிறுதித் தேர்வில் மதிப்பெண், (0–100)
W = வாரத்தேர்வில் மதிப்பெண், (0-20)
A = வருகைக் குறிப்பு (attendance) மதிப்பெண், (0-50)

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$0.5\ E + 2\ W = q$$
$$q + 0.2\ A = T$$

என்னும் இரு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்துக் கொள்க. அளவு கோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 (0.5\ E)$$
$$y = m_2 (2\ W)$$
$$z = m_3\, q$$
$$r = m_4 (0.2\ A)$$
$$s = m_5\, T$$

எனக் கொள்க. இங்கு $m_3 = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$m_5 = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}$$

E-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= 0.5\ m_1\ (100 - 0)$
$= 50\ m_1$

$m_1 = \dfrac{1}{5}$ எனக் கொள்க.

W-வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= 2\ m_2\ (20 - 0)$
$= 40\ m_2$

$m_2 = \dfrac{1}{4}$ எனக் கொள்க. எனவே

$$m_3 = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{9}$$

A-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= 0.2\ m_4\ (50 - 0)$
$= 10\ m_4$

$m_4 = 1$ எனக் கொள்க. எனவே

$$m_5 = \frac{\left(\frac{1}{9}\right)(1)}{\frac{1}{9} + 1}$$

$$= \frac{1}{10}$$

இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

E-க்கு $x = 0.1\ E$

W-க்கு $y = 0.5\ W$

A-க்கு $r = 0.2\ A$

T-க்கு $s = 0.1\ T$

ஆகும். q-அளவுகோலின் மீது அளவுக் குறியீடுகள் செய்யத் தேவையில்லை. ஆதலால் அதன் குறியீட்டுச் சமன்பாடு மேலே எழுதப்படவில்லை, E, W- அளவுகோல்களுக்கிடையில் q-அளவு கோலும், q, A-அளவுகோல்களுக்கிடையில் T-அளவுகோலும் இருக்கவேண்டும்.

E, q-அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் : q, W-அளவுகோல் களின் இடைத்தூரம் $= m_1 : m_2$

$= 4 : 5$

எனவே இத்தூரங்களை முறையே 2 செ. மீ., 2.5 செ. மீ. என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

q, T-அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் : T, A-அளவுகோல் களின் இடைத்தூரம்

$= m_2 : m_1$

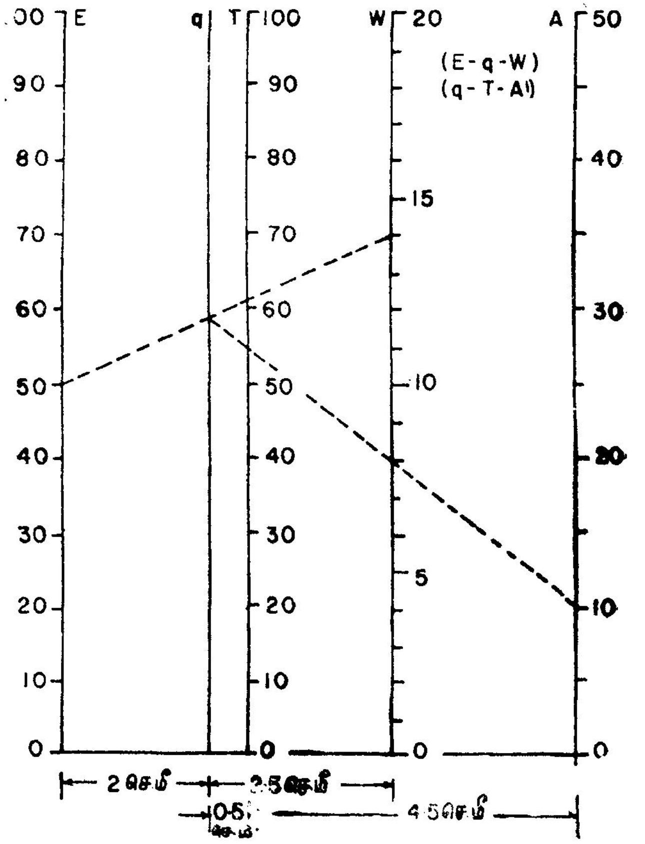
$= 1 : 9$

எனவே இத்தூரங்களை முறையே 0.5 செ.மீ , 4.5 செ.மீ. என எடுத்துக்கொள்ளலாம். E- அளவுகோலில் ஒரு செ.மீ. நீளம் 10 மதிப்பெண்களையும், W-அளவுகோலில் ஒரு செ.மீ. நீளம் 2 மதிப் பெண்களையும், A-அளவுகோலில் ஒரு செ.மீ. நீளம் 5 மதிப்பெண் களையும் குறிக்குமாறு, E, W. A-அளவுகோல்களை முதலில் அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும் (படம் 64). T-அளவுகோலை அமைக்கத் தொடங்குமுன், பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளி களைத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். $E = 0$, $W = 0$, $A = 0$ எனில் $T = 0$. வசதிக்காக, இடை அடிக்கோடு பொருத்தக் கோடாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. பொருத்தக் கோடு T-அச்சை வெட்டுமிடத்தில் 0 என அளவீடு செய்து, பின்னர், ஒரு செ.மீ. நீளம் 10 மதிப்பெண்களைக் குறிக்குமாறு, T-அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும். $E = 100$, $W = 20$, $A = 50$ எனில்

$$T = 0.5\ (100) + 2\ (20) + 0.2\ (50)$$
$$= 100$$

எனவே T-யின் பெருமம் 100 ஆகும். ஆகவே T-அளவுகோலில் 100 முடிய அளவீடு செய்யவேண்டும்.

பொருத்தக் கோட்டுக்காக, E, W, A-அளவுகோல்களின் மீது தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளப்படும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை. இப்புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லையெனில், முதலில், தேர்ந்தெடுத்துக்



படம் 64

கொண்ட E, W-மதிப்புகளுக்குள்ள புள்ளிகளை ஒரு நேர்கோட்டால் இணைக்கவேண்டும். பின்னர், இக்கோடு q-அச்சை வெட்டும் புள்ளியையும் தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்ட A-யின் மதிப்புக்கான புள்ளியையும் மற்றொரு நேர்கோட்டால் இணைக்கவேண்டும். இந்த

இரண்டாவது கோடு T-அச்சை வெட்டுமிடத்தில், தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்ட E, W, A-மதிப்புகளுக்கு ஒத்த T-யின் மதிப்பைக் குறிக்கவேண்டும். இதே முறையில்தான் E, W, A-மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்திலிருந்து T-யின் மதிப்பு காணப்படுகிறது.

$E = 50$, $A = 10$, $T = 55$ எனில் W-வின் மதிப்பைக் காண்பதற்குப் படம் 64-இல் குறியிணைப்புக் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. முதலில் $A = 10$, $T = 55$ என்ற புள்ளிகளுக்கான குறியிணைப்புக்கோட்டை வரையவேண்டும். பின்னர் இக்கோடு q-அச்சை வெட்டும் புள்ளியையும் $E = 50$ என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோட்டை வரையவேண்டும். இக்குறியிணைப்புக்கோடு W-அளவுகோலை வெட்டுமிடத்தில் உள்ள அளவீடான 14 என்பதே W-வின் தேவையான மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 20

$F = \dfrac{Wv^2}{gr}$ என்ற வாய்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை.

இதில் F = மையவிலக்கு விசை (centrifugal force), கி.கி. விசை

W = பொருளின் எடை, (10 - 80) கி.கி. விசை

v = பொருளின் திசைவேகம், (2 - 12) மீ./நொடி

g = ஈர்ப்பு முடுக்கம், 9.81 மீ./நொடி^{2}

r = வட்டப் பாதையின் ஆரம், (1 - 4) மீ.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\log F + \log 9.81 = \log W + 2 \log v - \log r$$

என மாற்றியமைத்துக் கொள்ளலாம். இதை

$$\log W + 2 \log v = q$$
$$q - \log r = \log F + \log 9.81$$

என்ற இரு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்துக் கொள்க. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \log W$$
$$y = m_2 (2 \log v)$$
$$z = m_3 q$$
$$p = m_4 (-\log r)$$
$$s = m_5 (\log F + \log 9.81)$$

எனக் கொள்க. இங்கு $m_3 = \dfrac{m_1 \, m_2}{m_1 + m_2}$

$$m_5 = \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}$$

W-வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (\log 80 - \log 10)$$
$$= 0.9031\, m_1$$

$m_1 = 10$ எனக் கொள்க.

v-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = 2m_2 (\log 12 - \log 2)$$
$$= 1.5563\, m_2$$

$m_2 = 5$ எனக் கொள்க. எனவே

$$m_3 = \frac{(10)\ (5)}{10 + 5}$$
$$= \frac{10}{3}$$

r-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_4 (\log 4 - \log 1)$$
$$= 0.6021\, m_4$$

$m_4 = 15$ எனக் கொள்க. எனவே

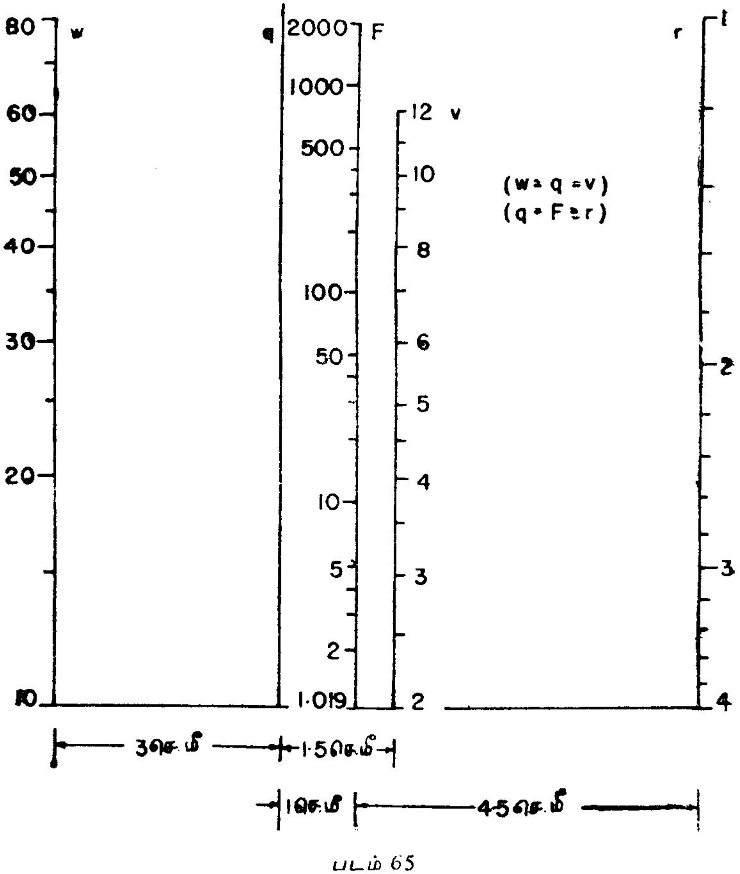
$$m_5 = \frac{\left(\frac{10}{3}\right) (15)}{\frac{10}{3} + 15}$$
$$= \frac{30}{11}$$

இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 10 \log W$$
$$y = 10 \log v$$
$$p = -15 \log r$$
$$s = \frac{30}{11} (\log F + \log 9.81)$$

ஆகும்.

W, *q*-அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் : *q*, *v*-அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் $= m_1 : m_2$
$= 2 : 1$



படம் 65

எனவே இத்தூரங்களை முறையே 3 செ. மீ., 1.5 செ.மீ. என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

q, *F*-அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் : *F*, *r*-அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் $= m_3 : m_4$
$= 2 : 9$

எனவே இத்தூரங்களை முறையே 1 செ.மீ., 4.5 செ.மீ. என எடுத்துக்கொள்ளலாம். *W*, *v*-அளவுகோல்களில் அளவீடுகள்

கீழிருந்து மேலாகவும், r அளவுகோலில் அவை மேலிருந்து கீழாகவும் கூடிக்கொண்டு செல்லும். அச்சடித்த மடக்கை அளவு கோல்களைப் பயன்படுத்தி இம் மூன்று அளவுகோல்களையும் எளிதில் அமைந்துவிடலாம் (படம் 65).

F அளவுகோலை அமைக்கத் தொடங்குமுன் பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். பொருத்தக் கோடானது கிடை அடிக்கோடாக வருமாறு எடுத்துக் கொள்ளுதல் நல்லது. கிடை அடிக்கோட்டில் $W = 10$, $v = 2$, $r = 4$.

$$\text{எனவே } F = \frac{10\,(4)}{(9.81)\,4} = 1{\cdot}019$$

ஆகவே, கிடை அடிக்கோடு F அச்சை வெட்டுமிடத்தில் 1.019 என அளவீடு செய்யவேண்டும். பின்னர்க் குறியீட்டுக் குணகம் $\frac{30}{11}$ -ஐக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலின் ஒரு சுற்றை விகிதசம விளக்கப்பட முறையில் ஒரு துண்டுத்தாளில் அமைத்துக்கொண்டு அதைப் பயன்படுத்தி F அளவுகோலை அமைத்து முடிக்க வேண்டும். F அளவுகோலில் எதுவரை அளவீடு செய்யவேண்டும் என்பதற்கு F-ன் பெருமத்தைக் கணக்கிடவேண்டும். $W = 80$, $v = 12$, $r = 1$ எனில் F-ன் மதிப்பு பெருமமாக இருக்கும். எனவே, F-ன் பெருமம் $= \frac{80\,(12)^2}{9{\cdot}81}$

$$= 1174$$

எனவே F அளவுகோலில் 1174 வரையிலாவது அளவீடு செய்ய வேண்டும். F-ன் பெருமத்தைக் கணக்கிடாமலும், F அளவு கோலில் எந்தப் புள்ளிவரை அளவீடு செய்யவேண்டும் என்பதை முடிவு செய்யலாம். $W = 80$, $v = 12$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டை முதலில் வரையவேண்டும். பின்னர் இக் கோடு q அச்சை வெட்டும் புள்ளியை $r = 1$ என்ற புள்ளியுடன் மற்றொரு நேர்கோட்டால் இணைக்கவேண்டும். இந்த இரண்டாவது கோடு F அச்சை வெட்டும் புள்ளியே F-ன் பெருமத்திற்குரிய புள்ளி யாகும். எனவே, F அளவுகோலில் இந்தப் புள்ளிவரை அளவீடு செய்தால் போதுமானது.

படம் 65-ல் காட்டியுள்ள நேமவரையத்தை அமைப்பதற்குத் தேவையான கணக்கீடுகளை ஓர் அட்டவணை அமைப்பில்

(அட்டவணை 8) செய்துகொள்வது நல்லது. இவ்வாறு செய்து கொள்வதால் நேரத்தைச் சிக்கனப்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

W, v அளவுகோல்களிலிருந்து q அளவுகோலுக்குள்ள தூரங்களை முறையே 3 செ.மீ., 1.5 செ.மீ. என எடுத்துக் கொள்ளாமல், இத்தூரங்களை 2 செ.மீ., 1 செ.மீ. என எடுத்துக் கொண்டு நேமவரையத்தை அமைத்தால், v, F அளவுகோல்கள் இரண்டையும் ஒரே நேர்கோட்டின்மீது அமைக்கவேண்டிய நிலை ஏற்படுகிறது. எனவே, பொதுவான (common) அந்த நேர் கோட்டின் இடப் பக்கத்தின்மீது ஓர் அளவுகோலையும் வலப் பக்கத்தின்மீது மற்ருேர் அளவுகோலையும் அமைக்கவேண்டும். v அளவுகோலை இடப் பக்கத்தின் மீதும், F அளவுகோலை வலப் பக்கத்தின் மீதும் அமைத்துக்கொள்ளலாம். இம்மாதிரியாக ஒரே நேர்கோட்டின்மீது இரண்டு அளவுகோல்களை அமைக்கும் பொழுது குறியிணைப்புக் கோடுகளை அமைப்பதிலும் அளவுகோல் களின் மீதுள்ள மதிப்புகளைப் படிப்பதிலும் மிகுந்த கவனம் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 21

$\triangle = \frac{1}{2} ab \sin C$ என்ற வாய்பாட்டுக்கு இணையளவுகோல் நேமவரையம் அமை. இதில் a, b என்பன முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் ஆகும். C என்பது இவ்விரு பக்கங்களுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் ஆகும். $\triangle$ என்பது முக்கோணத்தின் பரப்பு ஆகும். a, b இவை ஒவ்வொன்றின் நெடுக்கத்தையும் 1 முதல் 100 செ.மீ. எனக் கொள்க.

கொடுத்துள்ள வாய்பாட்டுக்கு C-யின் நெடுக்கமோ $\triangle$-வின் நெடுக்கமோ தெரிந்தால்தான் நேமவரையம் அமைக்கலாம். பொதுவாக C–யின் மதிப்பு $0°$ முதல் $180°$ முடிய மாறுபடும். இணையளவுகோல் நேமவரையம் தேவைப்படுவதால் கொடுத் துள்ள வாய்பாட்டை

$$\log \triangle + \log 2 = \log a + \log b + \log (\sin C)$$

என மடக்கை அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். $C = 0°$ எனில் $\log (\sin C) = -\infty$. எனவே C அளவுகோலில் 0 என்ற கோணத்திற்கு அளவீடு செய்ய இயலாது. ஆகவே $5°$ முதல் அளவீடு செய்து C அளவுகோலை அமைத்துக் கொள்ளலாம். $\sin C = \sin (180° - C)$ என்பதால், $5°$-க்குச் செய்யப்படும் அளவுக்குறியீடே $175°$–ஐயும் குறிக்கும். பொதுவாக, θ-க்குச் செய்யப்படும் அளவுக் குறியீடே $(180-\theta)$-ஐயும் குறிக்கும். எனவே $5°$ முதல் $90°$ முடிய C அளவுகோலில் அளவீடுகள்

அட்டவணை 8

சமன்பாடு : $F = \frac{Wv^2}{gr}$

அதாவது $\frac{Wv^2}{r} = 9.81F$

அதாவது $\log W + 2\log v - \log r = \log F + \log 9.81$

(1) $\log W + 2\log v = q$

(2) $q - \log r = \log F + \log 9.81$

மாறி	எல்லை வேறுபாடு		அளவுகோல் குணகம்	குறியீட்டுக் குணகம்	பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளிகள்
	எல்லைகள்	மடக்கைகள்			
W	80 10	1.9031 1.0000 0.9031	10	10	10
v	12 2	1.0792 0.3010 0.7782	5	$(5)(2) = 10$	2
q			$\frac{(10)(5)}{10+5} = \frac{10}{3}$		
r	4 1	0.6021 0 0.6021	15	—15	4
f			$\frac{\left(\frac{10}{3}\right)15}{\frac{10}{3}+15} = \frac{30}{11}$	$\frac{30}{11}$	1.019

இடைத்தூரம் :

W, q - அளவுகோல்கள் 3 செ.மீ.

q, v - அளவுகோல்கள் 1.5 செ.மீ.

q, F - அளவுகோல்கள் 1 செ.மீ.

F, r - அளவுகோல்கள் 4.5 செ.மீ.

செய்தால், C-ன் 5° முதல் 175° முடிய உள்ள மதிப்புகளுக்கு அந்த அளவுகோலைப் பயன்படுத்தலாம். கொடுத்துள்ள சமன் பாட்டை

$$\log a + \log b = q$$
$$q + \log(\sin C) = \log \triangle + \log 2$$

என இரண்டு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொள்க. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \log a$$
$$y = m_2 \log b$$
$$z = m_3 q$$
$$r = m_4 \log(\sin C)$$
$$s = m_5 (\log \triangle + \log 2)$$

எனக்கொள்க. இங்கு $m_3 = \dfrac{m_1 \; m_2}{m_1 + m_2}$

$$m_5 = \frac{m_3 \; m_4}{m_3 + m_4}$$

a-ன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (\log 100 - \log 1) = 2\,m_1$$

$m_1 = 5$ எனக்கொள்க.

b-ன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 (\log 100 - \log 1) = 2m_2$$

$m_2 = 5$ எனக்கொள்க. எனவே,

$$m_3 = \frac{(5)(5)}{5 + 5} = 2.5$$

C-ன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_4 [\log(\sin 90°) - \log(\sin 5°)]$$
$$= m_4 [0 - \bar{2}.9403]$$
$$= 1.0597\; m_4$$

$m_4 = 10$ எனக்கொள்க. எனவே,

$$m_5 = \frac{(2.5)\ (10)}{2.5 + 10}$$
$$= 2$$

இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 5 \log a$$
$$y = 5 \log b$$
$$r = 10 \log (\sin C)$$
$$s = 2 [\log \triangle + \log 2]$$

ஆகும்.

a, q அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் : q, b அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் $= m_1 : m_2$
$= 1 : 1$

இத் தூரங்கள் ஒவ்வொன்றையும் 3 செ.மீ. எனக்கொள்ளலாம்.

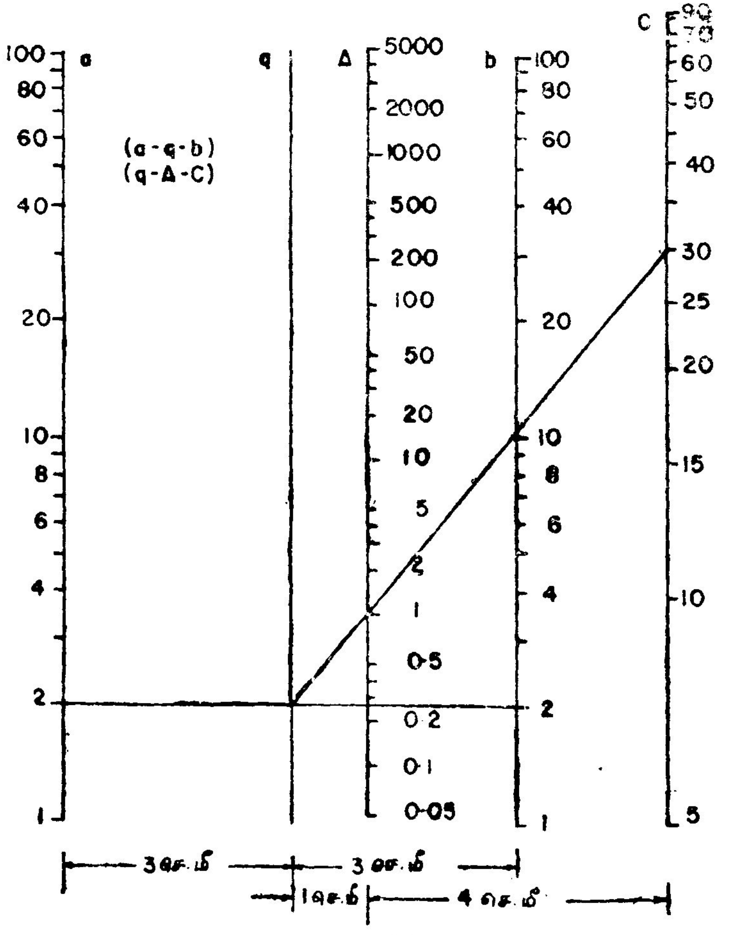
q, $\triangle$ அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் : $\triangle$; C அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் $= m_3 : m_4$
$= 1 : 4$

இத்தூரங்களை முறையே 1 செ.மீ., 4 செ.மீ. எனக்கொள்ளலாம்.

a, b அளவுகோல்களை, 5-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி மிக எளிதில் அமைத்துவிடலாம் (படம் 66). ஆனால் C அளவுகோலை அமைக்க, வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்கான தூரங்களைக் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கண்டுபிடித்துக் கொள்ளவேண்டும். கணிதப் பட்டியல்களில் log (sin C) என்பதன் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

C அளவுகோலை அமைக்க 5 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும் அல்லவா? இதற்கு அட்டவணை 9-ன் இறுதி நிரலில் உள்ள எண்களிலிருந்து -10.597 என்பதைக் கழிக்கவேண்டும். அதாவது, அந்த எண்களுடன் 10.597-ஐக் கூட்டவேண்டும். 90 என்னும் அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைக் கண்டுபிடித்தும் C அளவுகோலை அமைக்கலாம். இதற்கு அட்டவணை 9-ன் இறுதி நிரலில் உள்ள எண்களிலிருந்து 10 log (sin 90°) அதாவது 0-ஐக் கழிக்கவேண்டும், இப்படிச் செய்தால் இறுதி நிரலில் உள்ள எண்களே கிடைக்கும். எனவே, இறுதி நிரலில் உள்ள எண்கள், 90 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்கள் ஆகும். இந்த எண்கள் குறை எண்களாக

இருப்பதன் காரணம் மற்ற அளவீடுகள் யாவும் 90 என்ற அளவீட்டுக்குக் கீழ் இருப்பதே ஆகும். செ.மீ., மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலை அதன் 10.597 செ.மிட்டருக்கான அளவுக்குறியீடு C அச்சின் கீழ் முனையில் ஒன்றியிருக்குமாறு C அச்சின்மீது வைக்கவேண்டும். அத்துடன் சீர் அளவுகோலில்,



படம் 66

அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழ்நோக்கிக் கூடிக் கொண்டு செல்ல வேண்டும். இப்பொழுது 10.597, 7.603, 5.870,......செ.மீ. அளவுகளுக்குள்ள அளவுக்குறியீடுகளைச் செய்து முறையே 5, 10, 15,......என அளவீடு செய்தால் தேவையான C அளவுகோல் கிடைக்கும். வேலைச் சுமையைக் குறைப்பதற்காக, C அளவு

கோலில் 5 என்ற அளவீட்டிலிருந்து தூரங்கள் கணக்கிடப் படாமல் 90 என்ற அளவீட்டிலிருந்து கணக்கிட்டுக்கொள்ளப் படுகின்றன.

மூன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாடு களுக்கு அமைக்கப்படும் நேமவரையங்களில் பொருத்தக் கோட் டுக்காகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவேண்டும் என்பதில்லை என முன்னரே சொல்லப்பட்டது.

அட்டவணை 9

C (பாகை)	log (sin C)	10 log (sin C)
5	$\bar{2}.9403$	− 10.597
10	$\bar{1}.2397$	− 7.603
15	$\bar{1}.4130$	− 5.870
20	$\bar{1}.5341$	− 4.659
25	$\bar{1}.6259$	− 3.741
30	$\bar{1}.6990$	− 3.010
35	$\bar{1}.7586$	− 2.414
40	$\bar{1}.8081$	− 1.919
45	$\bar{1}.8495$	− 1.505
50	$\bar{1}.8843$	− 1.157
55	$\bar{1}.9134$	− 0.866
60	$\bar{1}.9375$	− 0.625
65	$\bar{1}.9573$	− 0.427
70	$\bar{1}.9730$	− 0.270
75	$\bar{1}.9849$	− 0.151
80	$\bar{1}.9934$	− 0.066
85	$\bar{1}.9983$	− 0.017
90	0	0

எனவே, ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத பொருத்தப் புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்து $\triangle$ அளவுகோலை எப்படி அமைப்பதெனப் பார்க்க லாம். $a=2$, $b=2$, $C=30°$ எனில், $\triangle = \frac{1}{2}(2)(2)\sin 30° = 1$

எனவே, $a = 2$, $b = 2$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டை முதலில் வரையவேண்டும். பின்னர் இக் கோடு q அச்சை வெட்டும் புள்ளியை $C = 30$ என்ற புள்ளியுடன் ஒரு நேர்கோட்டால் இணைக்கவேண்டும். இந்த இரண்டாவது கோடு △ அச்சை வெட்டுமிடத்தில் 1 என அளவீடு செய்யவேண்டும். 2-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக்கொண்ட மடக்கை அளவுகோலை ஒரு துண்டுத்தாளில் அமைத்து, அதைப் பயன்படுத்தி △ அச்சில், 1 என்ற அளவீட்டுக்கு மேல் உள்ள பகுதியிலும் கீழ் உள்ள பகுதியிலும் அளவீடுகள் செய்து, △ அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். △-வின் பெருமம் 5000 என்பதால் △ அளவுகோலில் 5000 முடிய அளவீடுகள் செய்யவேண்டும்.

சென்ற சில எடுத்துக்காட்டுகளில் நான்கு மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும் முறை விளக்கப்பட்டது. நான்குக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக்கொண்ட சமன்பாடுகளுக்கும் இதே முறையை விரிவுபடுத்தி இணையளவு கோல்களைக்கொண்ட நேமவரையம் அமைக்கலாம். பொதுவாக, n மாறிகளைக்கொண்ட சமன்பாட்டுக்கு இணையளவுகோல் நேமவரையம் அமைக்கவேண்டுமெனில் அச் சமன்பாட்டை $(n - 2)$ மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொள்ளவேண்டும். இவ்வாறு எழுதிக்கொள்ளும்பொழுது $(n-3)$ இடைநிலை மாறிகளைப் (intermediate variables) பயன்படுத்த வேண்டியிருக்கும். ஒவ்வோர் இடைநிலை மாறியும் இரண்டு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளில் இடம்பெறும். இடைநிலை மாறிகளுக்கான அளவுகோல்களில் அளவுக் குறியீடுகள் தேவையில்லை.

கொடுக்கப்பட்ட n மாறிச் சமன்பாட்டுக்கு (n-variable equation) நேமவரையம் அமைக்க, பிரித்து எழுதிக்கொண்ட ஒவ்வொரு மும்மாறிச் சமன்பாட்டுக்கும் இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையம் அமைக்கவேண்டும். இவ்வாறு அமைக்கும்பொழுது ஒரு மும்மாறிச் சமன்பாட்டுக்கான நேமவரையத்தில் ஓர் இடை நிலை மாறிக்கு எந்த அளவுகோல் அமைக்கப்படுகிறதோ அந்த அளவுகோலையே அந்த மாறியைக்கொண்ட இன்னொரு சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்திலும், அந்த மாறிக்குரிய அளவுகோலாகப் பயன்படுத்தவேண்டும். n மாறிகளைக்கொண்ட சமன்பாட்டுக்கு அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் அளவுக்குறியீடு செய்த அளவுகோல்கள் மொத்தம் n இருக்கும். அளவுக்குறியீடு செய்யப்படாத அளவுகோல்கள் மொத்தம் $(n-3)$ இருக்கும். அதாவது $(n-3)$ துணையளவுகோல்கள் இருக்கும். n மாறிகளில் ஏதேனும் $(n-1)$ மாறிகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் மீத

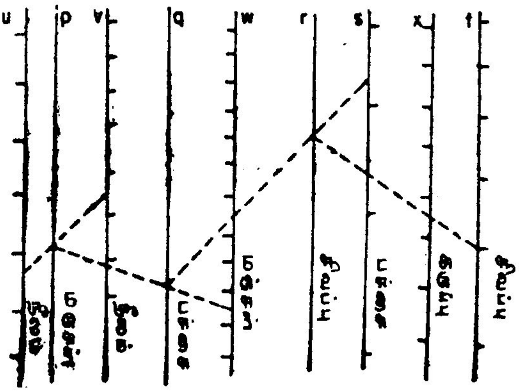
முள்ள n-ஆவது மாறியின் (nth variable) மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்க, $(n-2)$ குறியிணைப்புக் கோடுகள் வரையவேண்டும். ஒவ்வொரு மும்மாறிச் சமன்பாட்டுக்கும் ஒரு குறியிணைப்புக்கோடு ஆதலால் மொத்தம் $(n-2)$ குறியிணைப்புக் கோடுகள் இருக்கும்.

$$f_1(u) + f_2(v) + f_3(w) + f_4(s) + f_5(t) = f_6(x)$$

என்ற ஆறு மாறிச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்க வேண்டுமெனில் இதை,

$$\begin{aligned} f_1(u) + f_2(v) &= p \\ p + f_3(w) &= q \\ q + f_4(s) &= r \\ r + f_5(t) &= f_6(x) \end{aligned}$$

என நான்கு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொண்டு படம் 67-ல் காட்டியபடி நேமவரையத்தை அமைக்க வேண்டும். ஒரு குறியிணைப்புக் கோட்டை வரையும்பொழுது எந்தெந்த மாறிகளை இணைக்கவேண்டும் என்பதை விரைவில் கண்டுகொள்ள உதவுமாறு அளவுகோல்களை அமைப்பதில் படத்தில் எழுதியுள்ளபடி பல நிறங்களைப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.



படம் 67

எடுத்துக்காட்டு 22

$y = \dfrac{WL^3}{3\,EI}$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை.

இதில் y = ஒற்றைத்தாங்கி உத்தரத்தின் (cantilever beam) விலக்கம் (deflection), செ.மீ.

W = உத்தரத்தின் ஒரு முனையில் உள்ள சுமை, (600–700) கி.கி.

L = உத்தரத்தின் நீளம், (35–40) செ.மீ.

E = உத்தரம் ஆக்கப்பட்ட பொருளின் மீட்சிக் குணகம் (modulus of elasticity), $(10^6 - 2.5 \times 10^6)$ கி.கி/செ.மீ.^{2}

I = உத்தரத்தின் குறுக்கு வெட்டின் நிலைமத் திருப்பு திறன் (moment of inertia), (500–625) செ.மீ.^{4}

எடுத்துக்காட்டு 20-ல் கணக்கீடுகளை அட்டவணைப் படுத்தியதுபோல், கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைப்பதற்குத் தேவையான கணக்கீடுகளை அட்டவணை அமைப் பில் (அட்டவணை 10) எழுதிக்கொள்ளலாம்.

W அளவுகோலுக்கு அளவுகோல் குணகத்தை 15 என எடுத்துக்கொண்டால், குறியீட்டுக் குணகமும் 15 எனக் கிடைக் கும். இதனுல் அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி W அளவுகோலை எளிதில் அமைக்கலாம். ஆனுல், அளவுகோல் நீளம் மிகச் சிறியதாக இருக்கும். 600 முதல் 700 முடிய உள்ள அளவீடுகளுக்குள்ள அளவுகோல் ஒரு மடக்கைச் சுற்றின் ஒரு சிறு பகுதியாக இருப்பதே இதற்குக் காரணம் ஆகும். இதேபோல் L, I அளவுகோல்களிலும் குறிக்கப்படவேண்டிய அளவீடுகள் ஒரு மடக்கைச் சுற்றின் சிறு பகுதிகளாகவே இருக்கின்றன. எனவே 5, 10, 15, 20 போன்ற சிறிய குறியீட்டுக் குணகங்களை இந்த அளவு கோல்களுக்கு எடுத்துக்கொள்ள நினைத்தால் அளவு கோல்களின் நீளங்களும் மிகச் சிறியதாக இருக்கும். பெரும் பாலான அளவுகோல்களின் நீளங்கள் மிகச் சிறியதாக இருந்தால் அந்த நேமவரையத்தைப் பயன்படுத்திக் கண்டுபிடிக்கும் முடிவுகள் அவ்வளவு துல்லியமாக இருக்காது. எனவே, அளவுகோல் நீளங்கள் ஏறத்தாழ 10 செ. மீ. இருக்குமாறு, அளவுகோல் குணகங்கள் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ளப்பட்டுள்ளன. 150, 100, 25, $\frac{300}{25}$ என்ற குறியீட்டுக் குணகங்களுக்காக மடக்கை அளவுகோல்களை விகிதசம விளக்கப்பட முறையில் அமைத்துக்கொண்டு இவற்றைப் பயன்படுத்தி அளவுகோல்களை அமைக்கலாம். 150, 100 போன்ற குறியீட்டுக் குணகங்களைக் கொண்ட மடக்கை அளவுகோல்களை அமைப்பதற்கு 20, 15, 10 போன்ற குறியீட்டுக் குணகங்களைக் கொண்ட மடக்கை அளவு கோல்களை, முதன்மை அளவுகோலாய்ப் பயன்படுத்தி உருப் பெருக்கம் செய்யலாம். 15-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட

அட்டவணை 10

சமன்பாடு : $y = \frac{WL_3}{3EI}$

அதாவது $\log W \times 3 \log L - \log E - \log I - \log y + \log 3$

(1) $\log W + 3 \log L = p$

(2) $p - \log E = q$

(3) $q - \log I = \log y + \log 3$

மாறி	எல்லை வேறுபாடு: எல்லைகள்	எல்லை வேறுபாடு: மடக்கைகள்	அளவுகோல் குணகம்	குறிப்பீட்டுக் குணகம்	பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளிகள்
W	700 600	2.8451 2.7782 0.0669	150	150	600
L	40 35	1.6021 1.5441 0.0580	50	150	35
p			$\frac{(150)(50)}{150 + 50} = \frac{75}{2}$		
E	2.5×10^6 10^6	6.3979 6.0000 0.3979	25	— 25	2.5×10^6
q			$\frac{\left(\frac{75}{2}\right)(25)}{\frac{75}{2}+25} = 15$		
I	625 500	2.7959 2.6990 0.0969	100	—100	625
y			$\frac{(15)(100)}{15+100} = \frac{300}{23}$	$\frac{300}{23}$	$\frac{600\,(35)^3}{3(2.5)(10)^6\,625} = 0.005488$

இடைத்தூரம் :

W, p-அளவுகோல்கள் 1.5 செ.மீ.	q, E-அளவுகோல்கள் 1.6 செ.மீ.
p, L-அளவுகோல்கள் 0.5 செ.மீ.	q, y-அளவுகோல்கள் 0.6 செ.மீ.
p, q-அளவுகோல்கள் 2.4 செ.மீ.	y, I-அளவுகோல்கள் 4.0 செ.மீ.

ஒரு மடக்கை அளவுகோலில் 600 முதல் 700 முடிய உள்ள அளவீடு களுக்குள்ள அளவுக் குறியீடுகள் மிக நெருக்கமாக இருக்கும். எனவே 10 மடங்கு உருப்பெருக்கம் செய்யும்பொழுது பிழைகள் மிகுதியாக வரலாம். ஆகவே, விகிதசம விளக்கப்பட முறையைக் காட்டிலும், வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைக் குறி யீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிட்டு அளவுகோலை அமைப் பதே நல்லது. *W*, *L*, *I* அளவுகோல்களுக்கு இம் முறையையும், *E*, *y* அளவுகோல்களுக்கு விகிதசம விளக்கப்பட முறையில் அமைத்த அளவுகோல்களையும் பயன்படுத்தலாம். *W*, *L*, *I* அளவு கோல்களை அமைப்பதற்குத் தேவையான கணக்கீடுகள் முறையே அட்டவணைகள் 11, 12, 13 இவற்றில் காட்டப்பட்டுள்ளன. அட்டவணை 11-ன் இறுதி நிரலில் உள்ள எண்கள் *W* அளவு கோலில் 600 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களையும், அட்டவணை 12-ன் இறுதி நிரலில் உள்ள எண் கள் *L* அளவுகோலில் 35 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அள வீடுகளுக்குள்ள தூரங்களையும், அட்டவணை 13-ன் இறுதி நிரலில் உள்ள எண்கள் *I* அளவுகோலில் 500 என்ற அளவீட்டி லிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களையும் சென்டி மீட்ட ரில் குறிக்கின்றன. செ.மீ., மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி. *W*, *L*, *I* அளவுகோல்களை அமைக்க

அட்டவணை 11

W	log *W*	log *W* − log 600	150 (log *W* − log 600)
600	2.7782	0	0
610	2.7853	0.0071	1.065
620	2.7924	0.0142	2.130
630	2.7993	0.0211	3.165
640	2.8062	0·0280	4.200
650	2.8129	0.0347	5.205
660	2.8195	0.0413	6.195
670	2.8261	0.0479	7.185
680	2.8325	0.0543	8.145
690	2.8388	0.0606	9.090
700	2.8451	0.0669	10.035

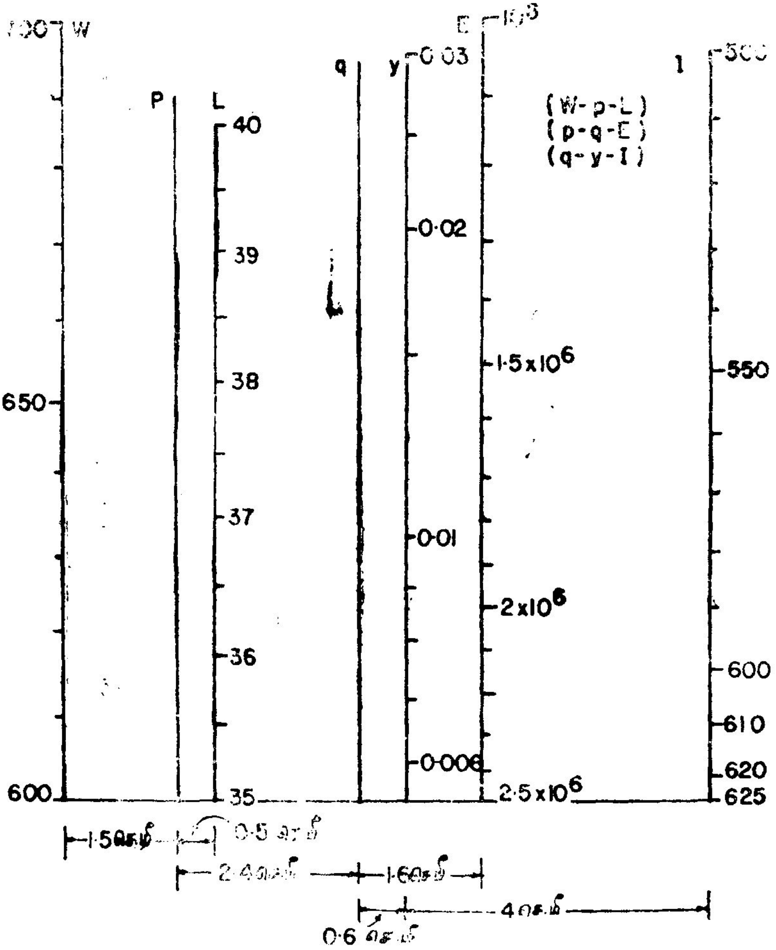
அட்டவணை 12

L	log L	log L—log 35	150 (log L - log 35)
35.0	1.5441	0	0
35.5	1.5502	0.0061	0.915
36.0	1.5563	0.0122	1.830
36.5	1.5623	0.0182	2.730
37.0	1.5682	0.0241	3.615
37.5	1.5740	0.0299	4.485
38.0	1.5798	0.0357	5.355
38.5	1.5855	0,0414	6.210
39.0	1.5911	0.0470	7.050
39.5	1.5966	0.0525	7.875
40.0	1.6021	0.0580	8.700

அட்டவணை 13

I	log I	log I—log 500	200 (log I—log 500)
500	2.6990	0.	0
510	2.7076	0.0086	0.86
520	2.7160	0.0170	1.70
530	2,7243	0.0253	2.53
540	2.7324	0.0334	3.34
550	2.7404	6.0414	4.14
560	2.7482	0.0492	4.02
570	2.7559	0.0569	5.69
580	2.7634	0.0644	6.44
590	2.7709	0.0719	7.19
600	2.7782	0.0792	7.92
610	2.7853	0.0863	8.63
620	2.7924	0.0934	9.34
625	2.7959	0.0969	9.69

வேண்டும் (படம் 68). *W*, *L* அளவுகோல்களில் அளவீடுகள் கீழிருந்து மேலாகவும், *I* அளவுகோலில் அவை மேலிருந்து கீழாகவும் கூடிக்கொண்டு செல்லவேண்டும். *W*, *L*, *I* அளவுகோல்களின் கீழ் முனைகளில் முறையே 600, 35, 625 என்ற அளவீடுகள் இருக்குமாறு பார்த்துக்கொள்ள வேண்டும். பின்னர் 25-ஐக் குறி



படம் 68

யீட்டுக் குணகமாகக்கொண்ட மடக்கை அளவுகோலின் உதவியால் *E* அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். *E* அளவுகோலில் அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லவேண்டும்.

E அளவுகோலின் கீழ்முனையில் 2.5×10^6 என்ற அளவீடு இருக்க வேண்டும். பொருத்தக் கோட்டுக்கான புள்ளிகள் யாவும் கிடை அடிக்கோட்டில் இருக்குமாறு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டுள்ளன. எனவே, கிடை அடிக்கோடு y அச்சை வெட்டும் இடத்தில் 0.005488 என அளவீடு செய்யவேண்டும், y அளவுகோலில் 0.005488 என்ற அளவீட்டுக்கும் 0.006 என்ற அளவீட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரம்

$$= \frac{300}{23}[\log 0.006 - \log 0.005488]$$

$$= \frac{300}{23}[\bar{3}.7782 - \bar{3}.7394]$$

$$= \frac{300}{23}[0.0388]$$

$$= 0.5061 \text{ செ.மீ.}$$

எனவே, y அளவுகோலில் 0.005488 என்ற அளவீட்டிலிருந்து 0.5061 செ.மீ. தூரத்தை மேல்நோக்கி அளந்து 0.006 என அளவீடு செய்து கொள்ளலாம். பின்னர் y அளவுகோலை அமைக்க $\frac{300}{23}$-ஐக் குறியீட்டுக் குணகமாகக் கொண்ட மடக்கை அளவு கோலை விகிதசம விளக்கப்பட முறையில் அமைத்துப் பயன் படுத்திக் கொள்ளவேண்டும்.

$$y\text{-ன் பெருமம்} = \frac{700\,(40)^3}{3(10)^6\,(500)}$$

$$= 0{\cdot}02987$$

எனவே, y அளவுகோலில் 0·02987 முடிய அளவீடு செய்தால் போதுமானது. அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்திலிருந்து, W, L, E, I இவற்றின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் y-ன் மதிப்பைக் காண்பது எப்படி? முதலில் W, L மதிப்புகளுக்கான குறியிணைப்புக் கோட்டை வரையவேண்டும். இக் கோடு p அச்சை வெட்டும் புள்ளியையும், E மதிப்புக்கான புள்ளியையும் இணைக்கும் இரண்டாவது குறியிணைப்புக் கோட்டைப் பின்னர் வரைய வேண்டும். அதன் பிறகு இரண்டாவது குறியிணைப்புக்கோடு q அச்சை வெட்டும் புள்ளியை I-யின் மதிப்புக்கான புள்ளியுடன் இணைக்கும் மூன்றாவது குறியிணைப்புக் கோட்டை வரைய வேண்டும். மூன்றாவது குறியிணைப்புக்கோடு y அளவுகோலை வெட்டும் இடத்தில் உள்ள மதிப்பே தேவையான y மதிப்பாகும்.

பயிற்சி

கீழ்க்காணும் வாய்பாடுகளுக்கு இணையளவுகோல் நேமவரையம் அமை (1—36).

1. $I = I_1 + I_2$

I = சந்திப்பில் (junction) நுழையும் மின்னோட்டம், ஆம்பியர்

I_1 = சந்திப்பை விட்டுச் செல்லும் மின்னோட்டம், (2 – 7) ஆம்பியர்

I_2 = சந்திப்பை விட்டுச் செல்லும் மின்னோட்டம், (7 – 36) ஆம்பியர்

2. $v = u + gt$

v = திசைவேகம், மீ./நொடி

u = தொடக்கத் திசைவேகம் (initial velocity), (0 – 8) மீ./நொடி

t = நேரம், (0 – 10) நொடி

g = 9.81 மீ./நொடி^{2}

3. $E = 0.8\,W + 0.2\,P$

E = தேர்வில் மொத்த மதிப்பெண்

W = எழுத்துமுறைத் தேர்வில் மதிப்பெண், (0—100)

P = செயல்முறைத் தேர்வில் மதிப்பெண், (0—100)

4. $E = 1.85 + 0.917\,(G - G_W)$

E = முற்று மின்னழுத்தம் (terminal voltage), வோல்ட்டு (volt)

G = மின்பகுபொருளின் (electrolyte) அடர்த்தி எண் (specific gravity), (1.18 – 1.32)

G_W = மின்கல வெப்ப நிலையில் (cell temperature) நீரின் அடர்த்தி எண், (0 98 – 1.00)

5. $A = 180 - B - C$

A = முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம், பாகை

B = முக்கோணத்தின் மற்றொரு கோணம், (20° – 90°)

C = முக்கோணத்தின் மூன்றாவது கோணம், (45° – 80°)

6. $E = IR$

E = மின்னழுத்தம் (electric potential), வோல்ட்டு

I = மின்னோட்டம், $(2-12)$ ஆம்பியர்

R = மின்தடை, $(5-30)$ ஓம்

7. $I = \frac{bd^3}{12}$

I = செவ்வகத்தின் நிலைமத் திருப்பு திறன், செ.மீ.^{4}

b = அகலம், $(1-10)$ செ.மீ.

d = உயரம், $(1-10)$ செ.மீ.

8. $V = \frac{\pi}{4} D^2 H$

V = உருளையின் கன அளவு, செ.மீ.^{3}

D = விட்டம், $(10-300)$ செ.மீ.

H = உயரம், $(30-500)$ செ.மீ.

9. $Q = 18.38\, bH^{\frac{3}{2}}$

Q = நீரின் வெளியேற்றம், செ.மீ.^{3}/நொடி

b = கலிங்கின் (weir) அகலம், $(100 - 600)$ செ.மீ.

H = நிலைமட்டம், $(15 - 45)$ செ.மீ.

10. $V = C\sqrt{2gH}$

V = நீரின் திசைவேகம், செ.மீ./நொடி

H = நிலைமட்டம், $(30 - 500)$ செ.மீ.

C = துளையைச் (orifice) சார்ந்த கெழு, $(0.6 - 1.0)$

g = 981 செ.மீ./நொடி^{2}

11. $V = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}}$

V = திசை வேகம், மீ./நொடி

n = சொரசொரப்புக் கெழு (roughness coefficient) 0.015

R = நீரியல் ஆரம் (hydraulic radius), $(0.5—7.5)$ மீ.

S = வாய்க்காலின் சரிவு (slope), $(0.001 - 0.01)$

12. $A = 71.84\ W^{0.425}\ H^{0.725}$

A = புறப் பரப்பு, செ.மீ.^{2}

W = எடை, (30 – 120) கி.கி.

H = உயரம், (100 – 200) செ.மீ.

13. $P = \frac{E^2}{R}$

P = திறன் (power), வாட்டு

E = மின்னழுத்தம், (10 — 220) வோல்ட்டு

R = மின்தடை, (10 — 1000) ஓம்

14. $q = \frac{1}{2}\rho v^2$

q = இயக்க அழுத்தம் (Dynamic pressure), (500 – 2000) கி.கி./மீ.^{2}

ρ = நீர்மத்தின் (liquid) நிறை-அடர்த்தி (mass-density)

v = நீர்மத்தின் திசை வேகம், (30 – 300) மீ./நொடி

15. $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$

r = சுழல் ஆரம், செ.மீ.

I = நிலைமத் திருப்பு திறன், (50 — 250) செ.மீ.^{4}

A = பரப்பளவு, (1 — 250) செ.மீ.^{2}

16. $t = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{hg}}$

t = ஊசலின் அலைவு நேரம், நொடி

h = சுழற்சி அச்சிலிருந்து (axis of rotation), ஈர்ப்பு மையத்தின் (centre of gravity) தூரம், (4 — 9) செ.மீ.

k = சுழல் ஆரம், (10 — 40) செ.மீ.

g = 981 செ.மீ./நொடி^{2}

17. $V = \frac{P}{0.5393\, d^2}$

V = விக்கெரின் கெட்டிமை எண் (Vicker's hardness number)

P = பயன்படுத்தப்பட்ட சுமை, (5 — 120) கி.கி.

d = வெட்டுப் பரப்பின் மூலைவிட்டம் (diagonal), (0 — 2) மி.மீ.

18. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$

f = அதிர்வு அலைவெண் (vibration frequency)

L = தூண்டம் (inductance), (0.2 — 30) மைக்ரோ ஹென்றி (microhenry)

C = மின் கொண்மை (electrical capacity), (2 — 300) மைக்ரோஃபாரடு (microfarad)

19. $A = 0.0124\, \frac{V^{1.37}}{W^{1.135}}$

W = மனிதனின் எடை, (50 — 100) கி.கி.

V = அவன் ஒரு மணி நேரத்தில் குடித்த மதுவின் அளவு, (50 — 400) மில்லி லிட்டர் (milli litre)

A = இரத்த ஓட்டத்தில் ஆல்கஹாலின் (alcohol) நூற்று வீதம்

20. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

T = அலைவு நேரம், நொடி

l = ஊசலின் நீளம், (80 — 100) செ.மீ.

g = ஈர்ப்பு முடுக்கம், (978 — 983) செ.மீ./நொடி^{2}

21. $C = \sqrt{a^2 + b^2}$

C = செங்கோண முக்கோணத்தின் (right angled triangle) கர்ணம் (hypotenuse), செ.மீ.

a = முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம், (3 — 20) செ.மீ.

b = முக்கோணத்தின் மற்ருெரு பக்கம், (4 — 25) செ.மீ.

22. $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

V = உள்ளீடற்ற (hollow) கோளத்தின் கன அளவு, செ.மீ.^{3}

R = வெளி ஆரம், (1 — 20) செ.மீ.

r = உள் ஆரம, (0 — 5) செ.மீ.

23. $h = h_0 - \frac{gt^2}{2}$

h = உயரம், மீட்டர்

h_0 = தொடக்க உயரம், (0 — 30) மீ.

t = நேரம், (0 — 5) நொடி

g = 9.81 மீ./நொடி^{2}

24. $P = M\left[10.82 - \frac{4425}{T}\right]$

P = பகுதி அழுத்தம், (0 — 1000) மி.மீ.

M = கரைசலில் (solution) உள்ள அம்மோனியாவின் மூலக் கூறுகள் (moles)/1000 கிராம் நீர், (0 — 100) கிராம்

T = தனி வெப்ப நிலை, (0 – 40)°C

25. $\sqrt{u} + 2\log v = 3\tan\theta$

u (0 — 1); v (1 — 10)

26. $\frac{l}{2} = r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

l = நாணின் (chord) நீளம், செ.மீ.

r = வட்டத்தின் ஆரம், (2 — 12) செ.மீ.

θ = நாண் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம், (30° — 120°)

27. $3L^3 = \sqrt{\dfrac{N}{M-9}}$

$L(1-10)$; $M(10-100)$

28. $V = 45D^2(\delta - 1)$

V = கனிமப் பொருளுடன் (mineral grain) விழும் நீரின் திசைவேகம், (5 — 100) செ.மீ./நொடி

D = கனிமப் பொருளின் விட்டம், (0.3—1.5) மி.மீ.

δ = கனிமத்தின் அடர்த்தி எண், (2 — 4)

29. $S = 0.2A + 0.32N + 0.48P$

S = புகைப் புள்ளிச் சுடரின் (smoke point flame) உயரம், மி.மீ.

A = அரோமேட்டிக் ஹைட்ரோ கார்பனின் (aromatic hydrocarbon) நூற்று வீத அளவு, (0 – 40)

N = நாஃப்தெனிக் ஹைட்ரோ கார்பனின் (napthenic hydrocarbon) நூற்று வீத அளவு, (0 – 25)

P = பாரஃபினிக் ஹைட்ரோ கார்பனின் (paraffinic hydrocarbon) நூற்று வீத அளவு, (45 – 95)

30. $W = 11.5C + 4.3(8H - O)$

W = எரிகாற்றின் (combustion air) எடை, (2.5 –7.5) கி.கி./ ஒரு கி.கி. எரிமம் (fuel)

C = கார்பனின் (carbon) எடை, (0.2—0.5) கி.கி. / ஒரு கி.கி. எரிமம்

H = ஹைட்ரஜனின் (hydrogen) எடை, (0–0.08) கி.கி. / ஒரு கி.கி. எரிமம்

O = ஆக்ஸிஜனின் (oxygen) எடை, (0 — 0.2) கி.கி. / ஒரு கி.கி. எரிமம்

31. $V = C\sqrt{RS}$

V = நீரோட்டத்தின் திசைவேகம், மீ./நொடி

C = வாய்க்காலைச் சார்ந்த கெழு, (0.5 — 12.5)

R = நீரியல் ஆரம், (0.03 — 6) மீ.

S = நீர்த்தளத்தின் சரிவு, (0.00005 — 0.01)

32. $T = \frac{\pi}{2} stD^2$

T = இரட்டைத் திருப்புதிறன் (torque), செ.மீ.-கி.கி.

s = சறுக்குப் பெயர்ச்சித் தகைவு (shearing stress), (300 — 1000) கி.கி./செ.மீ.^{2}

t = குழாய்ச் சுவரின் தடிப்பு (thickness), (0.5 — 2) செ.மீ.

D = குழாயின் விட்டம், (0.5 — 40) செ.மீ.

33. $W = \frac{\pi f d^3}{8D}$

W = பெருமச் சுமை (maximum load), (3 — 300) கி.கி.

D = சுருளின் (coil) சராசரி விட்டம், (0.5—5) செ.மீ.

d = கம்பியின் (wire) விட்டம், (0.07 — 0.8) செ.மீ.

f = தகைவு (stress), கி.கி./செ.மீ.^{2}

34. $P = \frac{EI \cos \theta}{100}$

P = ஒற்றைநிலை மாறு மின்னோட்டத்தின் திறன், கிலோவாட்டு (kilowatt)

E = மின்னழுத்தம், (25 — 440) வோல்ட்டு

I = மின்னோட்டம், (10 — 100) ஆம்பியர்

θ = மின்னழுத்தத்திற்கும், மின்னோட்டத்திற்கும் இடையே உள்ள இடப்பெயர்ச்சிக் கோணம் (displacement angle), (0° — 80°)

35. $Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g}\, cbH^{\frac{3}{2}}$

Q = கலிங்கில் விழுந்த நீரின் வெளியேற்றம், செ.மீ.^{3}/நொடி

g = ஈர்ப்பு முடுக்கம், 981 செ.மீ./நொடி^{2}

c = வெளியேற்றக் கெழு, (0.55 — 0.65)

b = அகலம், (30 — 750) செ.மீ.

H = நிலைமட்டம், (3 — 60) செ.மீ.

36. $f = \dfrac{3wl}{4bd^2}$

f = இழைத்தகைவு (fibre stress), (40 – 200) கி.கி./செ.மீ.²

w = மொத்தச் சுமை, (500 — 6000) கி.கி.

l = உத்தரத்தின் (beam) நீளம், (150 — 900) செ.மீ.

b = அகலம், (5 — 30) செ.மீ.

d = ஆழம் (depth), (10 — 40) செ.மீ.

4. Z-விளக்கப் படங்கள்
(Z-Charts)

12. $\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w)$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w)$$

என்ற வகைச் சமன்பாட்டை

$$\log f_1(u) - \log f_2(v) = \log f_3(w)$$

என மடக்கை அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக் கொண்டால், இதற்கு மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையம் அமைக்கலாம் எனச் சென்ற அதிகாரத்தில் சொல்லப்பட்டது. இச் சமன்பாட்டுக்கு இரு இணையளவுகோல்களும், ஒரு குறுக்குக் கோட்டு அளவுகோலும் (transverse scale) கொண்ட நேமவரையத்தையும் அமைக்க இயலும்.

u, v-அளவுகோல்களை இரு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்க வேண்டும். u, v- அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை (Zero points) இணைக்கும் குறுக்குக் கோட்டின் (transverse line) மீது w-அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும். இணையளவுகோல்களுக்கான கோடுகளை நிலைக்குத்துக் கோடுகளாக எடுத்துக்கொண்டால் அமைக்கப்பட்ட நேமவரையம் N அல்லது И வடிவத்திலும், இணையளவுகோல்களுக்கான கோடுகளைக் கிடைக்கோடுகளாக எடுத்துக்கொண்டால் அமைக்கப்பட்ட நேமவரையம் Z அல்லது Ƨ வடிவத்திலும் இருக்கும். எவ் வடிவத்தில் இருப்பினும் இரண்டு இணையளவுகோல்களையும் ஒரு குறுக்குக் கோட்டு அளவுகோலையும் கொண்ட நேமவரையத்திற்கு, Z-விளக்கப் படம் (Z-chart) அல்லது N-விளக்கப் படம் (N-chart) எனப் பெயர். இப் பாடநூலில், Z-விளக்கப் படங்கள் யாவும் И வடிவத்தில், அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையம் அமைக்க, மடக்கை அளவுகோல்களைப் பயன் படுத்த வேண்டும். ஆனால், இச் சமன்பாட்டுக்கு Z-விளக்கப் படம் அமைக்க $f_1(u)$, $f_2(v)$, $f_3(w)$ என்னும் சார்புகள் மடக்கைச் சார்புகளாக (logarithmic functions) இருந்தாலொழிய, மடக்கை அளவுகோல்கள் தேவை இல்லை. Z-விளக்கப் படத்தில் உள்ள ஒரு நன்மை என இதைக் கருதலாம்.

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w)$$

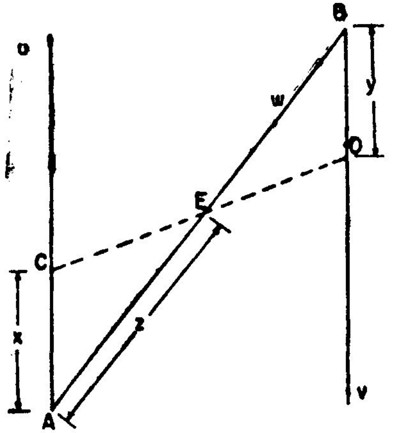
என்ற சமன்பாட்டுக்கு Z-விளக்கப் படம் அமைப்பதற்கு, அளவு கோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1(u)$$

$$y = m_2 f_2(v)$$

$$z = m_3 f_3(w)$$

எனக் கொள்க. u-அளவுகோலைக் கீழிருந்து மேலாகவும், v-அளவு கோலை மேலிருந்து கீழாகவும் இரண்டு நிலைக்குத்துக் கோடுகளின் மீது அமைக்க வேண்டும். u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்



படம் 69

புள்ளிகளை முறையே A, B என்க. A-ஐத் தொடக்கப் புள்ளி யாகக்கொண்டு, w-அளவுகோலை AB மீது அமைக்க வேண்டும்.

w-அளவுகோலில் தூரத்தை A-யிலிருந்து B-ஐ நோக்கி அளக்க வேண்டும். u, v, w இவற்றி ஒத்த மதிப்புகள் ஒரே நேர் கோட்டில் அமையவேண்டுமெனில் அளவுகோல் குணகங்களிடையே உள்ள தொடர்பினை இப்பொழுது காணலாம். u, v-மதிப்புகளை இணைக்கும் D என்ற குறியிணைப்புக்கோடு AB-ஐ, E என்னும் புள்ளியில் வெட்டட்டும் (படம் 69). C, D, E என்னும் புள்ளிகள் முறையே u, v, w என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் குறிப்பதால் $AC = x$; $BD = y$; $AE = z$. படம் 69-இல் AEC, BED என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BE}$$

எனவே $$\frac{x}{y} = \frac{z}{k-z}$$

இங்கு k என்பது AB என்ற மூலைவிட்டத்தின் நீளமாகும். k-யின் மதிப்பை வசதிக்கேற்ப எடுத்துக் கொள்ளலாம். மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் x, y, z என்பவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$\frac{m_1 f_1 (u)}{m_2 f_2 (v)} = \frac{m_3 f_3 (w)}{k-m_3 f_3 (w)}$$

இச்சமன்பாடு

$$\frac{f_1 (u)}{f_2 (v)} = f_3 (w)$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{k-m_3 f_3 (w)}$$

குறுக்குப் பெருக்கினால், $km_1 - m_1 m_3 f_3(w) = m_2 m_3$

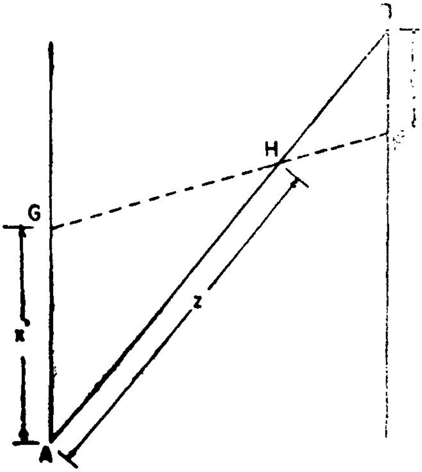
புற மாற்றத்தால், $km_1 = m_1 m_3 f_3(w) + m_2 m_3$

அதாவது, $km_1 = m_3 [m_1 f_3 (w) + m_2]$

அதாவது, $$m_3 = \frac{km_1}{m_1 f_3(w) + m_2}$$

இதிலிருந்து w-அளவுகோல் குணகம் ஒரு மாறிலி இல்லை எனத் தெரிகிறது. எனவே w-அளவுகோலை அமைக்க வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்கான தூரங்களைக் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிட வேண்டியிருக்கிறது. இவ்வாறு கணக்கீடு செய்து அமைக்காமல் எளிய முறையில் w-அளவுகோலை அமைப்ப தெப்படி எனக் கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளது.

F என்னும் நிலைப் புள்ளியை (fixed point) *B*-க்குக் கீழே *d* செ.மீ. தூரத்தில், v-அச்சின் மீது குறிக்கவும். *F* வழியாக வரையப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு *u*-அச்சை *G* என்ற புள்ளியிலும், *w*-அச்சை *H* என்ற புள்ளியிலும் வெட்டட்டும் (படம் 70). $AG = x'$ என்க. *AH* என்பது *z* என்பதற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டுமெனில், x'-இன் மதிப்பு யாது? படம் 70-இல் *AGH*, *BFH* என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து



படம் 70

$$\frac{AG}{BF} = \frac{AH}{BH}$$

எனவே, $\dfrac{x'}{d} = \dfrac{z}{k-z}$

ஆனால், $\dfrac{z}{k-z} = \dfrac{x}{y}$

ஆகவே, $\dfrac{x'}{d} = \dfrac{x}{y}$

அதாவது, $x' = d\left(\frac{x}{y}\right)$

$$= d\left[\frac{m_1 f_1(u)}{m_2 f_2(v)}\right]$$

$$= \frac{dm_1}{m_2} f_3(w)$$

ஆகவே A-ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு

$$x' = \frac{dm_1}{m_2} f_3(w)$$

என்ற துணையளவுகோலை (auxiliary scale) u-அச்சின்மீது அமைத்து, F என்னும் நிலைப்புள்ளி வழியாகத் துணையளவு கோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு நேர்கோடுகள் வரைந்தால், இக் கோடுகள் மூலைவிட்டக் கோட்டை (diagonal line), w-அளவு கோலின் ஒத்த அளவுக் குறியீடுகளில் வெட்டும்.

$$x' = \frac{dm_1}{m_2} f_3(w)$$

என்ற w-வின் துணையளவுகோல், w-அளவுகோலை அமைப்பதற்காகப் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு தற்காலிக அளவுகோலே (temporary scale) ஆகும். இத் துணையளவுகோலும்,

$$x = m_1 f_1(u)$$

என்ற u-அளவுகோலும், u-அச்சின்மீதே அமைக்கப்படுகின்றன. எனவே, குழப்பம் நேராமல் தடுக்க, u-அளவுகோலை u-அச்சின் வெளிப்பக்கத்தின்மீதும் w-வின் துணையளவுகோலை u-அச்சின் உட்பக்கத்தின்மீதும் அமைத்துக் கொள்ளலாம். w-வின் துணையளவுகோலும் u-அளவுகோலும் ஒரே அச்சின்மீது ஒரே திசையில் செல்லுமாறு அமைக்கப்படுவதோடு, இரண்டும் ஒரே தொடக்கப் புள்ளியைக் கொண்டுள்ளன. இவற்றைத் தவிர, இந்த இரு அளவுகோல்களுக்கும் வேறு எவ்விதத் தொடர்பும் கிடையாது. w-அளவுகோலில் B என்ற புள்ளிக்குரிய w-வின் மதிப்பு என்ன? $f_3(w)$-ஐ முடிவிலிக்குச் (infinity) சமப்படுத்தினால் கிடைக்கும் w-வின் மதிப்பே அந்த மதிப்பு ஆகும்.

$$f_1(u) = [f_2(v)]^{f_3(w)}$$

என்ற வகைச் சமன்பாட்டை

$$\log f_1(u) = f_3(w) \log f_2(v)$$

அதாவது, $$\frac{\log f_1(u)}{\log f_2(v)} = f_3(w)$$

என மடக்கை அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக்கொண்டால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு Z-விளக்கப் படம் அமைக்கலாம். இதற்கு

$$x = m_1 \log f_1(u)$$
$$y = m_2 \log f_2(v)$$

என்ற அளவுகோல்களை இரு இணைகோடுகளின்மீது, ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்க வேண்டும்.

$$x' = \frac{dm_1}{m_2} f_3(w)$$

என்ற w-வின் துணையளவுகோலின் உதவியால், w-அளவுகோலை u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் மூலைவிட்டக் கோட்டின்மீது அமைக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 23

$I = \frac{E}{R}$ என்ற வாய்ப்பாட்டுக்கு Z-விளக்கப்படம் ஒன்று அமை. இதில் I = மின்னோட்டம், ஆம்பியர்

E = மின்னியக்கு விசை (electromotive force), (0 — 110) வோல்ட்டு

R = மின்தடை, (0 — 10) ஓம்

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

E-க்கு $x = m_1 E$

R-க்கு $y = m_2 R$

I-யின் துணையளவுகோலுக்கு $x' = \frac{dm_1}{m_2} I$

எனக் கொள்க.

E-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (110-0) = 110\, m_1$$

$m_1 = \frac{1}{10}$ எனக் கொள்க.

R-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 (10-0) = 10\, m_2$$

$m_2 = 1$ எனக்கொள்க. *I*-அளவுகோலை அமைப்பதற்காக, *E*-அச்சின் மீது அமைக்கப்படும் *I*-யின் துணையளவுகோலின் அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x' = \frac{dm_1}{m_2} I$$

அதாவது $x' = 0.1\, dI$

ஆகும் $d = 2$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே, குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

E-அளவுகோலுக்கு $x = 0.1\, E$

R-அளவுகோலுக்கு $y = R$

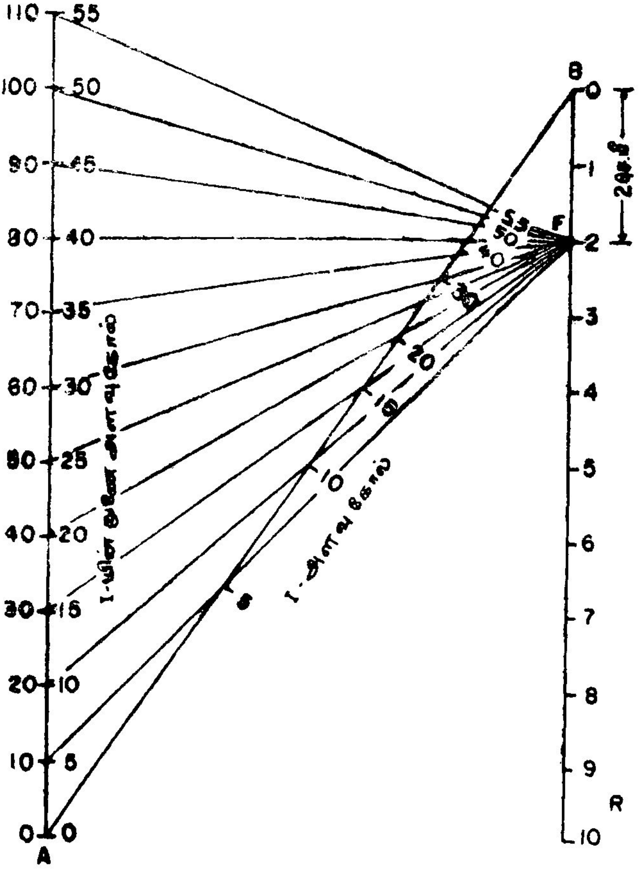
I-யின் துணையளவுகோலுக்கு $x' = 0.2\, I$

ஆகும். *E*, *R*-அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்க வேண்டும். இணைகோடுகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை வசதிக்கேற்ப எடுத்துக்கொள்ளலாம். *E*, *R*-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை முறையே *A*, *B* எனக் கொள்க. *E*-அளவுகோலைக் கீழிருந்து மேலாகவும் *R*-அளவுகோலை மேலிருந்து கீழாகவும் அமைத்துக் கொள்க (படம் 71). *E*-அளவுகோலில் ஒரு செ. மீ. நீளம் 10 வோல்ட்டுகளையும், *R*- அளவுகோலில் ஒரு செ. மீ. நீளம் ஒரு ஓமையும் குறிக்கும். *E*, *R*-அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தொடக்கப்புள்ளிக்கான அளவீடு 0 (சுழி) ஆகும் *E*. *R*-அளவுகோல்களை அமைத்ததும், *AB*-யின் மீது *I*-அளவு கோலை அமைக்கவேண்டும். *I*-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளி *A* என்பதையும், இந்த அளவுகோல் *A*-யிலிருந்து *B*-ஐ நோக்கிச்

செல்கிறது என்பதையும் நினைவிற் கொள்க. *I*-அளவுகோலை அமைப்பதற்கு

$$x' = 0.2\,I$$

என்னும் துணையளவுகோலை, *A*-ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு *E*-அளவுகோலுக்குரிய கோட்டின் மீது *E*-அளவுகோல்

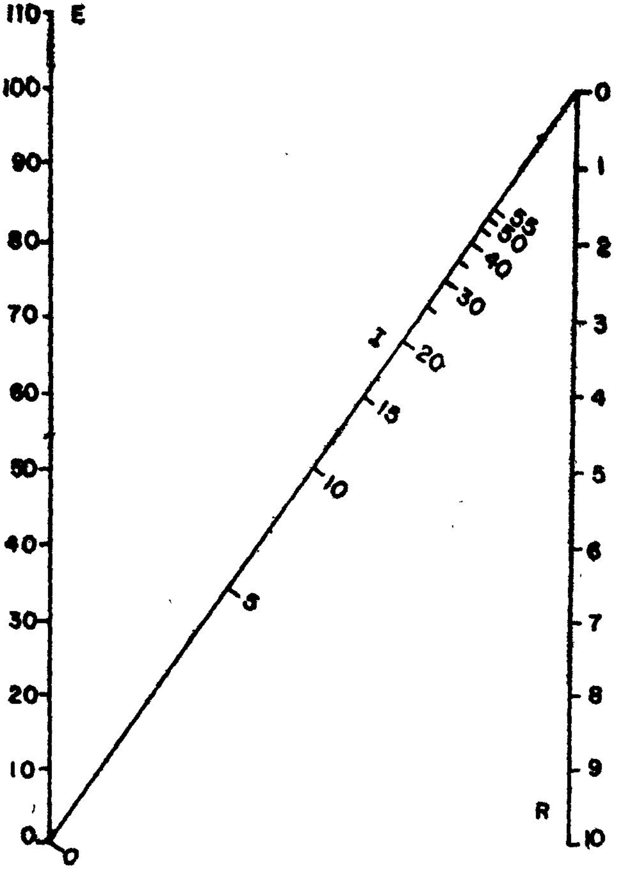


படம் 71

செல்லும் திசையில் அமைக்கவேண்டும். துணையளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளிக்குரிய அளவீடு 0 ஆகும். ஒரு செ.மீ. நீளம் 5 ஆம்பியர்களைக் குறிக்குமாறு *I*-யின் துணையளவுகோலை எளிதில் அமைத்துவிடலாம். *E*-அளவுகோலின் நீளமும், *I*-யின் துணையளவுகோலின் நீளமும் சமமாயிருக்கத் தேவையில்லை.

$d = 2$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. எனவே, F என்ற நிலைப்புள்ளியை B-க்குக் கீழே 2 செ. மீ. தூரத்தில் இருக்குமாறு R-அச்சின் மீது குறிக்கவேண்டும். F வழியாகத் துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு நேர்கோடுகள் வரைந்தால் இக்கோடுகள் மூலைவிட்டக் கோட்டை I-அளவுகோலின் ஒத்த அளவுக்குறியீடுகளில் வெட்டும்.

E-அளவுகோலின் நீளமான 11 செ. மீ. நீளத்திற்கு, I-யின் துணையளவுகோலில் அளவுக்குறியீடுகள் செய்தால், 55 முடியவே அளவீடு செய்யமுடியும். எனவே, மூலைவிட்ட அளவு கோலில் 55-க்கு மேல் அளவீடு செய்யமுடியாது. மூலைவிட்ட அளவுகோலில் 55-க்கு மேல் அளவீடு செய்ய நினைத்தால்,



படம் 72

E-அச்சை மேலே இன்னும் நீட்டிவிட்டுத் துணையளவுகோலில் 55-க்கு மேற்பட்ட அளவீடுகளைக் குறிக்கவேண்டும். E-அச்சை மேலே நீட்டிவிடாமல், I-அளவுகோலில் 55-க்கு மேற்பட்ட அளவீடுகளைக் குறிக்கவேண்டுமெனில் d-யின் மதிப்பை 2-ஐவிடக் குறைவாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். d-யின் மதிப்பு எவ்வளவுக்கெவ்வளவு குறைவாக எடுத்துக்கொள்ளப் படுகிறதோ, அவ்வளவுக்கவ்வளவு மிகுதியான அளவீடுகளை மூலைவிட்ட அளவுகோலில் குறிக்கலாம்.

I-அளவுகோலை அமைத்தவுடன் அதை அமைக்கப் பயன் படுத்திய துணையளவுகோலையும், F வழியாக வரைந்த நேர்கோடு களையும் துடைத்தழித்துவிடலாம். துணையளவுகோலும் தேவை யற்ற நேர்கோடுகளும் துடைத்தழிக்கப்பட்ட நேமவரையம் படம் 72-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு :-

1. E, R-அளவுகோல்களின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கத் தேவை இல்லை. E, R-அளவுகோல்கள் ஒரே மட்டத்தில் இருக்கவும் தேவை இல்லை.

2. I-அளவுகோலில், அளவீடுகள் மூலைவிட்டத்தின் மேல் முனையை நோக்கி மிகவும் விரைந்து செல்கின்றன. மேலும், மூலைவிட்டத்தின் மேல் முனையில் அதாவது B-யில், I-யின் மதிப்பு ∞ ஆகும்.

3. அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் I-அளவு கோலில் 0,5,10,15,...... போன்ற அளவீடுகளுக்கே அளவுக் குறியீடுகள் செய்யப்பட்டுள்ளன. 1,2,3,4,...... போன்ற அளவீடுகளுக்கு அளவுக்குறியீடுகள் செய்ய வேண்டுமேல், துணை யளவுகோலில் 1,2,3,4,......போன்ற அளவீடுகளுக்கு அளவுக் குறியீடுகளைச் செய்துகொள்ள வேண்டும். அல்லது, d-யின் மதிப்பை மிகுதியாக எடுத்துக் கொண்டு துணையளவுகோலை அமைத்தால், I-யின் குறைந்த மதிப்புகளுக்கான அளவுக் குறியீடுகளை மூலைவிட்ட அளவுகோலில் செய்ய முடியும்.

4. ஒரே ஒரு நிலைப்புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டுதான் மூலைவிட்ட அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை. எத்தனை நிலைப்புள்ளிகளை வேண்டுமானாலும் R-அச்சின் மீது எடுத்துக்கொண்டு மூலைவிட்ட அளவுகோலை அமைக்கலாம். நிலைப்புள்ளி மாற மாறத் துணையளவுகோலின் சமன்

பாடும் மாறும். ஆனால், நிலைப்புள்ளி எதுவாயினும், மூலை விட்ட அளவுகோலில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளிக்குரிய அளவீடு மாறாது. இதே கருத்தை, d-க்கு எந்த மதிப்பை எடுத்துக் கொண்டாலும், மூலைவிட்ட அளவுகோலில் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவீட்டுக்குரிய புள்ளியின் இருப்பிடம் மாறாது எனவும் சொல்லலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 24

$I = \frac{\pi}{64} ab^3$ என்னும் வாய்பாடு, நீள்வட்டத்தின் (ellipse) நிலைமத் திருப்பு திறனைக் கணக்கிடப் பயன்படுகிறது. இதில்

I = நிலைமத் திருப்புதிறன், $(10 - 500)$ செ.மீ.^{4}

a = பேரச்சின் (major axis) நீளம், $(4 - 20)$ செ.மீ.

b = சிற்றச்சின் (minor axis) நீளம், $(5 - 10)$ செ.மீ.

இவ் வாய்பாட்டுக்கு Z-விளக்கப்படம் ஒன்றை அமை.

இக்கணக்கில் மூன்று மாறிகளுக்கும் நெடுக்கங்கள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. எனவே, Z-விளக்கப்படம் அமைப்பதற்கேற்ப இதை

$$a = \frac{64\ I}{\pi b^3}$$

என்றோ

$$b^3 = \frac{64\ I}{\pi a}$$

என்றோ மாற்றியமைத்துக் கொள்ளலாம். முதலில் சொன்ன அமைப்புக்கு Z-விளக்கப்படம் அமைக்கும் முறை இங்கு விளக்கப்பட்டுள்ளது. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$I\text{-க்கு} \quad x = m_1 \left(\frac{64\ I}{\pi}\right)$$

$$b\text{-க்கு} \quad y = m_2 b^3$$

a-யின் துணையளவுகோலுக்கு $x' = \frac{dm_1}{m_2} a$

எனக் கொள்க.

I, b-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் மீதுதான் a-அளவுகோல் அமைக்கப்படவேண்

டும் என்பதை நினைவிற் கொள்க. I, b-அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தொடக்கப்புள்ளிக்கான அளவீடு 0 ஆகும். 0 என்ற அளவீடு கொடுக்கப்பட்ட நெடுக்கங்களுக்குள் இல்லையெனினும் இந்த அளவீட்டுக்கென அளவுக்குறியீடு செய்ய வேண்டும். எனவே I-அளவுகோலில், நெடுக்கத்தை 0 முதல் 500 முடிய எனவும், b-அளவுகோலில், நெடுக்கத்தை 0 முதல் 10 முடிய எனவும் கொள்க. அப்பொழுதுதான் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டை எளிதில் வரைந்து கொள்ள முடியும்.

I-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = \frac{64\, m_1}{\pi}(500 - 0)$$

$$= 500\,(20.37)\, m_1$$

$m_1 = \dfrac{1}{(50)(20.37)}$ எனக் கொள்க. இவ்வாறு கொள்வதால், I-அளவுகோலின் குறியீட்டுக் குணகம் $\frac{1}{50}$ என எளிமையாக இருக்கும்.

b-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2\,(10^3 - 0)$$

$$= 1000\, m_2$$

$m_2 = \frac{1}{100}$ எனக் கொள்க. இப்பொழுது a-யின் துணையளவு கோலின் சமன்பாடு

$$x' = \frac{dm_1}{m_2}\, a$$

$$\text{அதாவது} \quad x' = \frac{100\, da}{(50)\,(20.37)}$$

$$\text{அதாவது} \quad x' = \frac{da}{10.185}$$

ஆகும். a-அளவுகோலில் 20 முடிய அளவீடு செய்ய வேண்டியிருப்பதால் துணையளவுகோலின் சமன்பாடு

$$x' = \frac{a}{2}$$

என்றிருப்பின் மிக்க வசதியாக இருக்கும். எனவே $d = 5.0925$ என எடுத்துக்கொள்க. d-ஐ ஒரு முழு எண்ணாக எடுத்துக்

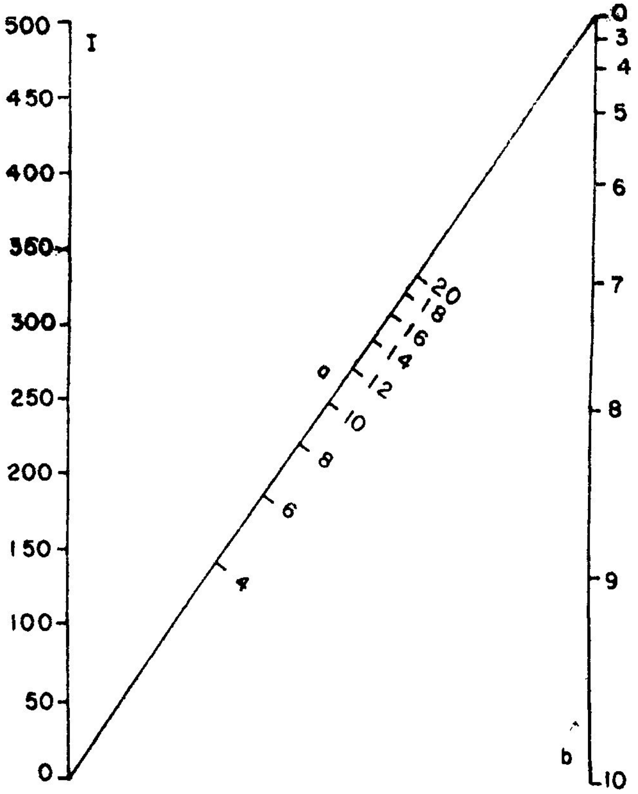
கொண்டால் துணையளவுகோலை அமைக்கத் தூரங்களைக் கணக்கிட வேண்டியிருக்கும். இதைத் தவிர்க்கவே d-யின் மதிப்பு 5.0925 என எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. எனவே குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$I\text{-க்கு} \quad x = \tfrac{1}{50} I$$

$$b \text{ க்கு} \quad y = \tfrac{1}{100} b^3$$

$$a\text{-யின் துணையளவுகோலுக்கு } x' = \frac{a}{2}$$

ஆகும்.



படம் 73

I, b-அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும் (படம் 73) I-அளவுகோலில் ஒரு செ.மீ. நீளம் 50 அலகுகளைக் குறிக்கும். b-அளவுகோலை அமைக்க b-யின்

வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான y-யின் மதிப்புகளை அட்டவணை 14-இல் உள்ளபடி கணக்கிட்டுக் கொள்ளவேண்டும். தொடக்கப் புள்ளிகளை அளவுகோல்களின் மீது குறிக்கவேண்டும் என்ற ஒரே காரணத்திற்காகவே, l, b இவற்றின் நெடுக்கங்கள் 0 முதல்

அட்டவணை 14

b	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0.27	0.64	1.25	2.16	3.43	5.12	7.29	10

எடுத்துக்கொள்ளப்படுகின்றன. ஆனால், அளவுகோல்களின் மீது கொடுக்கப்பட்ட நெடுக்கங்களுக்குரிய அளவீடுகளை மட்டும் குறித்தால் போதுமானது.

l, b-அளவுகோல்களை அமைத்த பின்னர், இந்த அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும் மூலைவிட்டக் கோட்டின் மீது a-அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். இதற்கு

$$x' = \frac{a}{2}$$

என்னும் துணையளவுகோலை, l-அச்சின் மீது அமைக்கவேண்டும். l-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளிதான் a-யின் துணையளவு கோலுக்கும், a-அளவுகோலுக்கும் தொடக்கப்புள்ளி என்பதை நினைவிற் கொள்க. a-யின் துணையளவுகோலில் 4 முதல் 20 முடிய அளவீடு செய்தால் போதுமானது. F என்ற நிலைப் புள்ளியை b-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளிக்குக் கீழே 5.0925 செ.மீ. தூரத்தில் இருக்குமாறு b-அச்சின் மீது குறிக்க வேண்டும். F வழியாகத் துணையளவுகோலின் அளவுக்குறியீடு களுக்கு நேர்கோடுகள் வரைந்தால் இக்கோடுகள் மூலை விட்டக் கோட்டை a-அளவுகோலின் ஒத்த அளவுக்குறியீடு களில் வெட்டும். a-அளவுகோலை அமைத்தவுடன் அதை அமைக்கப் பயன்படுத்திய துணையளவுகோலையும் F வழியாக வரைந்த நேர்கோடுகளையும் துடைத்தழித்துவிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 25

$\frac{100\,x}{100 - y} = z^2 - 2$ என்னும் சமன்பாட்டுக்கு Z-விளக்கப் படம் அமை. $x\,(10 - 100)$; $y\,(20 - 80)$; $z\,(10 - 20)$.

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$u = m_1\ (100\ x)$$

$$v = m_2\ (100 - y)$$

z-இன் துணையளவுகோலுக்கு $u' = \dfrac{dm_1}{m_2}\ (z^2 - 2)$ எனக் கொள்க. கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் x, y, z என்னும் மாறிகள் வருவதால் அளவுகோல் சமன்பாடுகளில் தூரங்களைக் குறிக்க u, v, u' என்பவை பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. x-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளிக்கான அளவீடு 0 ஆகும். எனவே, x-அளவு கோலைச் சுழியிலிருந்து தொடங்கவேண்டும். y-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கான அளவீடு 100 ஆகும். எனவே, y-அளவு கோலை 100 என்ற அளவீட்டிலிருந்து தொடங்கவேண்டும். x-அளவுகோலைக் கீழிருந்து மேலாகவும், y-அளவுகோலை மேலிருந்து கீழாகவும் அமைக்கவேண்டும். y-அளவுகோலுக்குரிய சார்பு ஒரு குறையும் சார்பு (decreasing function) ஆதலால் y-அளவுகோலில் அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழாகக் குறைந்து கொண்டு செல்லும். எனவே, x, y-அளவுகோல்கள் இரண்டிலுமே அளவீடுகள் கீழிருந்து மேலாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லும். z-அச்சை வரைய, x, y-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளைக் குறிக்கவேண்டும். ஆகவே, x-இன் நெடுக்கம் 10 முதல் 100 முடிய என்றாலும் அதை 0 முதல் 100 முடிய என்றும், y-இன் நெடுக்கம் 20 முதல் 80 முடிய என்றாலும் அதை 20 முதல் 100 முடிய என்றும் கொள்க.

x-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = 100\ m_1\ (100 - 0)$$

$$= 10{,}000\ m_1$$

$m_1 = \dfrac{1}{1000}$ எனக் கொள்க.

y-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2\ (100 - 20)$$

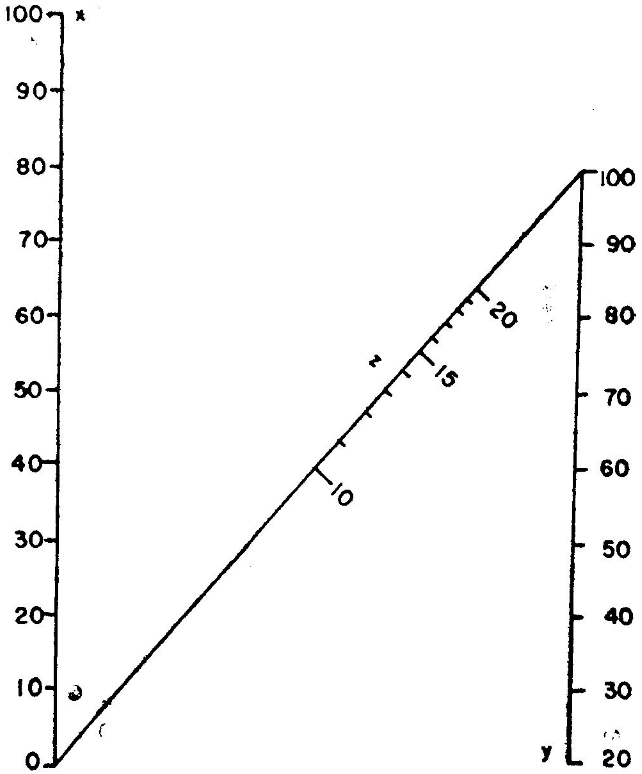
$$= 80\ m_2$$

$m_2 = \dfrac{1}{10}$ எனக் கொள்க. x, y-அளவுகோல்களின் நீளங்கள் சமமாயிருக்கத் தேவையில்லை ஆதலால், அளவுகோல்களை எளிதாக அமைப்பதற்கேற்ப m_1, m_2 இவற்றின் மதிப்புகள்

தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன. z-அளவுகோலை அமைக்க, x-அச்சின் மீது அமைக்கப்படும் z-இன் துணையளவு கோலுக்கான அளவுகோல் சமன்பாடு

$$u' = \frac{dm_1}{m_2}\ (z^2 - 2)$$

$$\text{அதாவது } u' = \frac{d}{100}\ (z^2 - 2)$$



படம் 74

ஆகும். z-அளவுகோலில் 20 முடிய அளவீடு செய்தால் போது மானது. எனவே, $d = 2.5$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ள லாம். இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$u = \frac{1}{10} x$$

$$v = \frac{1}{10} (100 - y)$$

z-இன் துணையளவுகோலுக்கு $u' = \frac{1}{40} (z^2 - 2)$ ஆகும்.

x, y-அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது அமைக்கவேண்டும் (படம் 74). இரண்டு அளவுகோல்களிலும் அளவீடுகள் கீழிருந்து மேலாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லும். x, y-அளவுகோல்கள் இரண்டிலும் ஒரு செ.மீ. நீளம் 10 அலகுகளைக் குறிக்கும்.

$x = 0$ என்ற x-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியையும், $y = 100$ என்ற y-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்கோடே z-அச்சாகும். x, y-அளவுகோல்களை அமைத்து முடித்ததும், z-அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். இதற்கு

$$u' = \frac{1}{40} (z^2 - 2)$$

என்ற z-இன் துணையளவுகோலை x-அச்சின்மீது அமைக்க வேண்டும். x-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிதான் z-இன் துணையளவுகோலுக்கும், z-அளவுகோலுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாகும். x, z-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஒன்றியிருந்தாலும், அப் புள்ளிகளுக்கான அளவீடுகள் சமமாயிருக்கத் தேவையில்லை. இங்கு x-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்குரிய அளவீடு 0 ஆகும். z-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்குரிய அளவீடு $\sqrt{2}$ ஆகும்.

z-இன் துணையளவுகோலை அமைக்க z-இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான u'-இன் மதிப்புகளை, அதாவது தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரங்களைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ள வேண்டும். (அட்டவணை 15). z-அளவுகோலில் 10 முதல் 20 முடிய அளவீடு செய்தால் போதும் ஆதலால், z-இன் துணையளவுகோலிலும் இதே அளவீடுகளைச் செய்தால் போதும். செ.மீ., மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலைப்

அட்டவணை 15

z	$z^2 - 2$	$\frac{1}{40}(z^2 - 2)$
10	98	2.450
11	119	2.975
12	142	3.550
13	167	4.175
14	194	4.850
15	223	5.575
16	254	6.350
17	287	7.175
18	322	8.050
19	359	8.975
20	398	9.950

பயன்படுத்தி x-அச்சின்மீது, z-இன் துணையளவுகோலை அமைக்க வேண்டும். F என்னும் நிலைப்புள்ளியை y-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்குக் கீழே 2.5 செ.மீ. தூரத்தில் y-அச்சின் மீது குறிக்கவேண்டும். F வழியாகத் துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு நேர்கோடுகள் வரைந்தால், அக் கோடுகள் மூலைவிட்டக் கோட்டை z-அளவுகோலின் ஒத்த அளவுக் குறியீடுகளில் வெட்டும். z-அளவுகோலை அமைத்ததும் துணையளவுகோலையும் F வழியாக வரைந்த நேர்கோடுகளையும் துடைத்தழித்துவிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 26

$V = \pi r^2 h$ என்ற வாய்பாட்டில்

V = உருளையின் கன அளவு, (5000 — 6000) செ.மீ.^{3}

r = உருளையின் ஆரம், (14 — 18) செ.மீ.

h = உருளையின் உயரம், (5 — 10) செ.மீ.

இவ்வாய்பாட்டுக்கு ஒரு Z-விளக்கப் படம் அமை.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில், மூன்று மாறிகளுக்கும் நெடுக்கங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. எனவே, இச் சமன்பாட்டை

$$\frac{V}{h} = \pi r^2$$

என்றோ

$$\frac{V}{r^2} = \pi h$$

என்றோ எழுதிக்கொள்ளலாம். இரண்டாவதாகச் சொன்ன அமைப்புக்கு Z-விளக்கப் படம் அமைக்கும் முறையை இப்பொழுது காணலாம். எனவே V, r-அளவுகோல்கள் இணையளவுகோல்களாகவும், h-அளவுகோல் மூலைவிட்ட அளவு கோலாகவும் அமையும். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$V\text{-க்கு } x = m_1 V$$

$$r\text{-க்கு } y = m_2 r^2$$

$$h\text{-இன் துணையளவுகோலுக்கு } x' = \frac{dm_1}{m_2}(\pi h)$$

எனக் கொள்க. V-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளி $V = 0$ ஆகும். r-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளி $r = 0$ ஆகும். எனவே, V என்னும் மாறி 0 முதல் 6000 முடிய மாறுபடுகிறது என்றும் r என்னும் மாறி 0 முதல் 18 முடிய மாறுபடுகிறது என்றும் கொள்ளவேண்டும். எனவே, V-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (6000 - 0)$$
$$= 6000\, m_1$$

$m_1 = \frac{1}{500}$ எனக் கொள்க. எனவே V-அளவுகோலின் நீளம் 12 செ.மீ. ஆகும். r-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 (18^2 - 0)$$
$$= 324\, m_2$$

$m_2 = \frac{1}{25}$ எனக் கொள்க. எனவே, r அளவுகோலின் நீளம் 12.96 செ.மீ. ஆகும். V-அளவுகோலில் பயன்படும் நெடுக்கம் 5000 முதல் 6000 முடியவே ஆகும். இந்த அளவீடுகளைக் குறிக்க

V-அளவுகோலில் $\frac{1}{500}$ (6000 — 5000) அதாவது 2 செ.மீ. நீளமே பயன்படுத்தப்படுகிறது. இதேபோல, r-அளவுகோலில் பயன்படும் அளவீடுகளான 14 முதல் 18 முடிய உள்ளவற்றைக் குறிக்க $\frac{1}{25}$ $(18^2 - 14^2)$ அதாவது 5.12 செ.மீ. நீளமே பயன்படுத்தப்படுகிறது எனவே, V, r-அளவுகோல்களில், தொடக்கப்புள்ளிகளைக் குறிக்க நினைத்தால் கொடுக்கப்பட்ட நெடுக்கங்கள் குறைவான நீளத்திற்குள் அடங்கிவிடுகின்றன.

V-அளவுகோலில் 5000 முதல் 6000 முடிய உள்ள அளவீடு களை 10 செ.மீ. நீளத்தில் குறிக்க நினைத்தால் m_1-இன் மதிப்பை $\frac{1}{100}$ என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். m_1-இன் இந்த மதிப்புக்கு V-அளவுகோலில் 0 முதல் 6000 முடிய அளவீடு செய்ய 60 செ.மீ. நீளம் தேவைப்படுகிறது. தாளின் அளவுக்கு இந் நீளம் ஒத்துவராது. இதேபோல $m_2 = \frac{2}{25}$ என எடுத்துக் கொண்டால் r-அளவுகோலில் 14 முதல் 18 முடிய உள்ள அளவீடுகளை $\frac{2}{25}$ $(18^2 - 14^2)$ அதாவது 10.24 செ.மீ. நீளத்தில் குறிக்கலாம். ஆனால் 0 முதல் 18 முடிய அளவீடு செய்ய $\frac{2}{25}$ $(18^2 - 0)$ அதாவது 25.92 செ.மீ. நீளம் தேவைப்படுகிறது. தாளின் அளவுக்கு இந் நீளமும் ஒத்துவராது. பயன்படும் நெடுக்கங்கள் மிகக் குறைவான நீளங்களுக்குள் அடங்கக்கூடாது. அதே நேரத்தில் அமைக்கப்படும் விளக்கப் படம் தாளின் அளவுக்குள் அடங்கவேண்டும். இந்தச் சிக்கலைத் தீர்க்க என்ன வழி ?

V, r-அளவுகோல்களில் அவற்றின் தொடக்கப் புள்ளிகளைக் குறிக்கச் சொன்னாலும், அளவுகோல்களின்மீது கொடுத்துள்ள நெடுக்கங்களுக்குரிய அளவீடுகளைச் செய்தால் போதுமானது. h-அளவுகோலை, V, r-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின்மீது அமைக்கவேண்டும் என்ற ஒரே காரணத்திற்காகவே V, r-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் குறிக்கப்படவேண்டும் என்பது வலியுறுத்தப்படுகிறது. தொடக்கப் புள்ளிகளைக் குறிக்காமலேயே வேறு ஏதேனும் ஒரு வழியில் h-அளவுகோலுக்குரிய மூலைவிட்டக் கோட்டை அமைத்து விட்டால் முன்பு சொன்ன சிக்கலுக்குத் தீர்வு கிடைக்கும்.

$m_1 = \dfrac{1}{100}$ என்றும் $m_2 = \dfrac{2}{25}$ என்றும் கொண்டு V, r-அளவு கோல்களை இரண்டு துணைக்கோடுகளின்மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் அமைக்கவும். குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$V\text{-க்கு} \quad x = \frac{1}{100} V$$

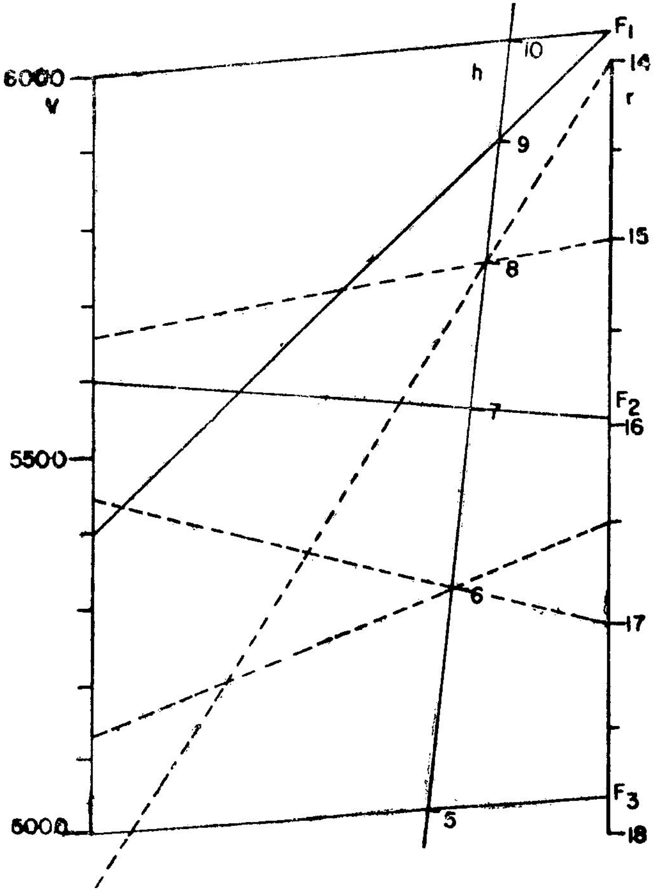
$$r\text{-க்கு} \quad y = \frac{2}{25} r^2$$

ஆகும். V-அளவுகோலில் 5000 முதல் 6000 முடியவும், r-அளவு கோலில் 14 முதல் 18 முடியவும் அளவீடுகள் செய்க (படம் 75). V-அளவுகோலில் ஒரு செ.மீ. நீளம் 100 அலகுகளைக் குறிக்கும். r-அளவுகோலை அமைக்க வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்கான தூரங்களைக் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிட்டுக்கொள்ள வேண்டும் (அட்டவணை 16). அட்டவணையின் இறுதி நிரலில்

அட்டவணை 16

r	r^2	$r^2 - 14^2$	$\frac{2}{25}(r^2 - 14^2)$
14.0	196.00	0	0
14.5	210.25	14.25	1.14
15.0	225.00	29.00	2.32
15.5	240.25	44.25	3.54
16.0	256.00	60.00	4.80
16.5	272.25	76.25	6.10
17.0	289.00	93.00	7.44
17.5	306.25	110.25	8.82
18.0	324.00	128.00	10.24

உள்ள எண்கள் *r*-அளவுகோலில் 14 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்கள் ஆகும். *V*, *r*-அளவு கோல்களை அமைத்து முடிந்ததும் *h*-அளவுகோலுக்குரிய நேர் கோட்டை வரைவது எப்படி எனக் காணலாம்.



படம் 75

$h = 6, \quad r = 17$ எனில் $V = \pi (17)^2 6$

$= 5448$

$h = 6, \quad r = 16.5$ எனில் $V = \pi (16.5)^2 6$

$= 5132$

எனவே, $r = 17$, $V = 5448$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும்

நேர்கோட்டிலும், $r = 16.5$, $V = 5132$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டிலும் $h = 6$ என்ற புள்ளி இருக்கும். எனவே, இந்த இரு நேர்கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $h = 6$ ஆகும்.

$$h = 8, \quad r = 15 \quad \text{எனில்} \quad V = \pi (15)^2 8$$
$$= 5655$$

$$h = 8, \quad r = 14 \quad \text{எனில்} \quad V = \pi (14)^2 8$$
$$= 4926$$

எனவே, $r = 15$, $V = 5655$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடும், $r = 14$, $V = 4926$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $h = 8$ ஆகும். $V = 4926$ என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளி V-அளவுகோலில் இடம் பெற வில்லை எனினும் அதற்குரிய புள்ளி, $V = 5000$ என்ற புள்ளிக்குக் கீழே $\frac{1}{100}(5000 - 4926)$ அதாவது 0.74 செ.மீ. தூரத்தில் இருக்கும். $h = 6$, $h = 8$ என்ற இரு புள்ளிகளைக் குறித்துவிட்ட தால் இந்த இரு புள்ளிகளையும் ஒரு நேர்கோட்டால் இணைத்து h-அச்சை முடிவு செய்து கொள்ளலாம்.

இனி h-அளவுகோலை அமைப்பது எப்படி எனக் காணலாம். h-அளவுகோலை அமைக்க h-இன் துணையளவுகோலை, V அச்சின் மீது அமைக்கவேண்டும். h-இன் துணையளவுகோலின் அளவு கோல் சமன்பாடு

$$x' = \frac{dm_1}{m_2}(\pi h)$$

$$\text{அதாவது } x' = \frac{\pi dh}{8}$$

ஆகும். துணையளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளி V-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியுடன் ஒன்றியிருக்கும் என்பதையும், V-அளவு கோலின் தொடக்கப்புள்ளி $V = 5000$ என்ற புள்ளிக்குக் கீழே 50 செ.மீ. தூரத்தில் உள்ளது என்பதையும் நினைவிற் கொள்க. h-அளவுகோலில் 5 முதல் 10 முடிய அளவீடுகள் செய்யவேண்டும் h-அச்சை அமைக்கும்பொழுதே $h = 6$, $h = 8$ என்ற அளவீடுகள் செய்யப்பட்டுள்ளன. எனவே, $h = 5, 7, 9, 10$ என்ற அள வீடுகளைச் செய்தால் போதுமானது. ஒரே ஒரு நிலைப்புள்ளியின் உதவியால் இந்த நான்கு அளவீடுகளையும் குறிப்பதென்பது

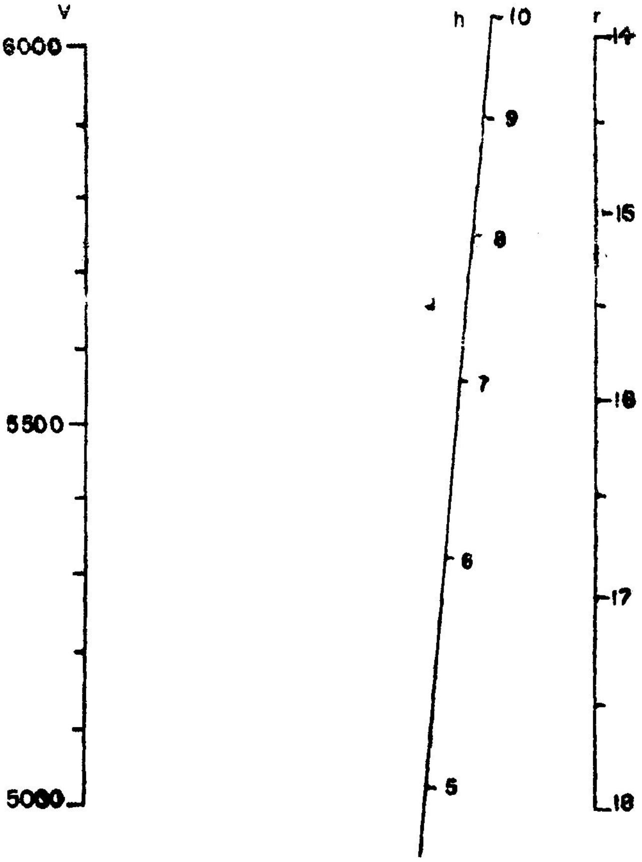
இயலாததாகும். எனவே, வெவ்வேறு நிலைப்புள்ளிகளுக்குரிய *d*-யின் மதிப்புகளையும் அவை எந்தெந்த அளவீடுகளைச் செய்யப் பயன்படுகின்றன என்பதையும் அட்டவணைப்படுத்திக் கொள்ளலாம் (அட்டவணை 17). *d*-யின் மதிப்பானது *r*-அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து நிலைப்புள்ளிக்குள்ள தூரத்தைச் செ. மீட்டரில் குறிக்கிறது. *r*-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியானது $r = 14$ என்ற புள்ளிக்குமேல் $\frac{2}{25}(14)^2$ அதாவது 15.68 செ.மீ. தூரத்தில் உள்ளது. $h = 10, 9$ என்ற அளவீடுகளைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப்படும் நிலைப்புள்ளியானது $r = 14$

அட்டவணை 17

h-அளவீடு	10	9	7	5
துணையளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு	$x' = 6h$	$x' = 6h$	$x' = 8h$	$x' = 10h$
துணையளவுகோல் மீது அளவுக்குறியீட்டின் இருப்பிடம் ($V = 5000$ என்ற புள்ளிக்கு மேல்) செ. மீட்டரில்	10	4	6	0
d	$\frac{48}{\pi} = 15.28$	$\frac{48}{\pi} = 15.28$	$\frac{64}{\pi} = 20.37$	$\frac{80}{\pi} = 25.46$
நிலைப்புள்ளியின் இருப்பிடம் ($r = 14$ என்ற புள்ளிக்குக் கீழ்) செ. மீட்டரில்	— 0.4	— 0.4	4.69	9.78
நிலைப்புள்ளி	F_1	F_1	F_2	F_3

என்ற புள்ளிக்குக் கீழ் — 0.4 செ.மீ. தூரத்தில் உள்ளதெனில், $r = 14$ என்ற புள்ளிக்கு மேல் 0.4 செ.மீ. தூரத்தில் உள்ள

தெனப் பொருள். அட்டவணை 17-இல் உள்ள கணக்கீடுகளுக்கு ஏற்ப நிலைப்புள்ளிகள் வழியாகத் துணையளவுகோலின் மீதுள்ள அளவுக் குறியீடுகளுக்கு நேர்கோடுகள் வரைந்தால் அவை h-அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும் (படம் 75). h-அளவு கோலை அமைத்து முடித்ததும் அதை அமைக்கப் பயன்படுத்திய மற்ற கோடுகளைத் துடைத்தழித்து விடலாம். தேவையற்ற கோடுகளைத் துடைத்தழித்த பின்னர் உள்ள நேமவரையம் படம் 76-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 76

துணையளவுகோலின் உதவியின்றியும், 5, 7, 9, 10 என்ற அளவீடுகளை h-அளவுகோலின் மீது எளிதில் குறிக்கலாம்.

h-அச்சை அமைக்க $h=6$, $h=8$ என்ற மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள v, r-மதிப்புகளின் இரண்டு தொகுதிகள் கண்டு பிடிக்கப்பட்டன அல்லவா? இதேபோல, $h=5, 7, 9, 10$ என்ற மதிப்புகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள v, r-மதிப்புகளின் ஒரு தொகுதியைக் கணக்கிட்டு அம் மதிப்புகளுக்குரிய நேர்கோட்டை வரைந்தால் அக் கோடு h-அச்சை ஒத்த அளவீட்டில் வெட்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 27

$u=v^w$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை.

$u\,(0.7 - 50)$; $v\,(0.5 - 4)$; $w\,(0.5 - 3)$.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\log u = w \log v$$

என மடக்கை அமைப்பில் எழுதிக் கொள்க. எனவே

$$\frac{\log u}{\log v} = w$$

இச்சமன்பாடு

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w)$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளதால் இதற்கு Z-விளக்கப் படம் அமைக்கலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

u-க்கு $\quad x = m_1 \log u$

v-க்கு $\quad y = m_2 \log v$

w-வின் துணையளவுகோலுக்கு $x' = \dfrac{dm_1}{m_2} w$

எனக் கொள்க. தொடக்கப் புள்ளிகளைக் குறிக்காமலேயே மூலைவிட்டக் கோட்டை அமைக்கும் முறையைத் தெரிந்து கொண்டதனால், Z-விளக்கப் படங்களில் இணையளவுகோல்களின் அளவுகோல் நீளங்களைக் கணக்கிடக் கொடுக்கப்பட்ட நெடுக்கங்களையே பயன்படுத்தலாம். u-வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= m_1 (\log 50 - \log 0.7)$

$= m_1 (1.6990 - \bar{1}.8451)$

$= 1.8539\ m_1$

$m_1 = 5$ என எடுத்துக் கொள்க. v - யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= m_2 (\log 4 - \log 0.5)$

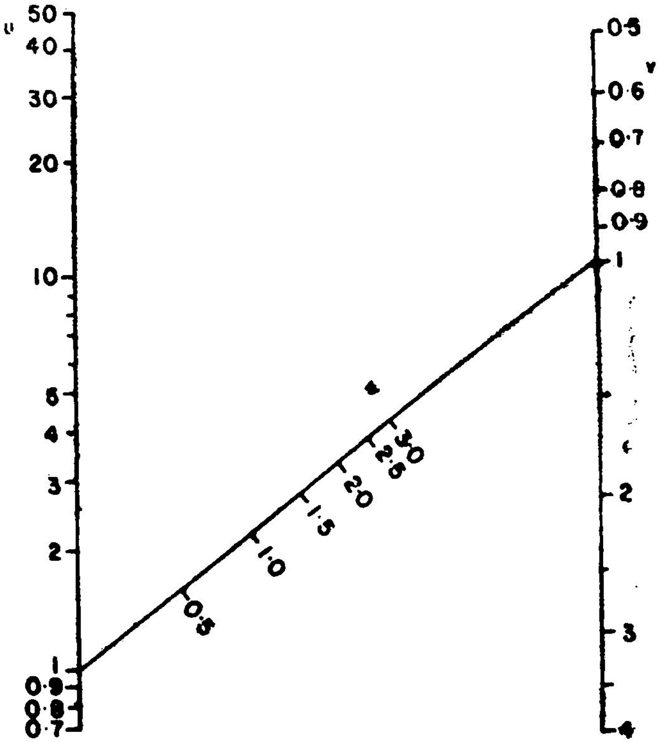
$= m_2 \log 8$

$= 0.9031\ m_2$

$m_2 = 10$ என எடுத்துக் கொள்க. எனவே குறியீட்டுச் சமன் பாடுகள்

u - அளவுகோலுக்கு $x = 5 \log u$

v - அளவுகோலுக்கு $y = 10 \log v$



படம் 77

ஆகும். u, v - அளவுகோல்களை அச்சடித்த மடக்கை அளவு கோல்களைப் பயன்படுத்தி எளிதில் அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

u, v - அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும் (படம் 77). $u = 1$, $v = 1$ என்ற புள்ளிகள் முறையே u, v - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஆகும். இப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் மீதே w - அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும். w - அளவுகோலை அமைக்கப் பயன்படும் துணையளவுகோலின் அளவுகோல் சமன்பாடு

$$x' = \frac{dm_1}{m_2} w$$

$$\text{அதாவது } x' = \frac{dw}{2}$$

ஆகும். துணையளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளி u - அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியுடன் ஒன்றியிருக்குமாறு, துணையளவுகோலை u - அச்சின் மீது u - அளவுகோல் செல்லும் திசையில் அமைக்க வேண்டும். w - அளவுகோலில் 3 முடிய அளவீடு செய்ய வேண்டும். வசதிக்காக $d = 6$ எனக்கொள்ளலாம். இப்பொழுது துணையளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x' = 3w$$

ஆகும். $u = 1$ என்ற புள்ளியைத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு இந்தத் துணையளவுகோலை அமைத்த பின்னர், F என்ற நிலைப்புள்ளியை $v = 1$ என்ற புள்ளிக்குக் கீழே 6 செ. மீ. தூரத்தில் v - அச்சின் மீது குறித்து F வழியாகத் துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு நேர்கோடுகள் வரைந்தால் அவை w - அச்சை ஒத்த அளவுக்குறியீடுகளில் வெட்டும்.

13. $f_1(u) + f_2(v) = \dfrac{f_1(u)}{f_3(w)}$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3\ (w)$$

என்றவகைச் சமன்பாட்டுக்கு Z-விளக்கப்படம் அமைத்தது போல

$$f_1(u) + f_2(v) = \frac{f_1(u)}{f_3(w)}$$

என்ற வகைச் சமன்பாட்டுக்கும் Z-விளக்கப்படம் அமைக்கலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1 (u)$$

$$y = m_2 f_2 (v)$$

$$z = m_3 f_3 (w)$$

எனக் கொள்க. u - அளவுகோலைக் கீழிருந்து மேலாகவும், v - அளவுகோலை மேலிருந்து கீழாகவும் இரண்டு நிலைக்குத்துக் கோடுகளின் மீது அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். u, v, - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை முறையே A, B என்க (படம் 69- ஐக் காண்க). A - ஐத் தொடக்கப்புள்ளியாகக் கொண்டு AB என்ற மூலைவிட்டக்கோட்டின் மீது A- யிலிருந்து B–க்குச் செல்லும் திசையில் w - அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w, -- மதிப்புகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவேண்டுமெனில் அளவுகோல் குணகங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினை இப்பொழுது காணலாம். u, v – மதிப்புகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக்கோடு AB- ஐ E என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். C, D, E என்ற புள்ளிகள் முறையே u, v, w - மதிப்புகளைக் குறிக்கின்றன. எனவே $AC = x$; $BD = y$; $AE = z$

படம் 69- இல் $\triangle BED$, $\triangle AEC$ இரண்டும் வடிவொத்தன.

$$\text{எனவே } \frac{BD}{AC} = \frac{BE}{AE}$$

$$\text{அதாவது } \frac{y}{x} = \frac{k-z}{z}$$

இங்கு k என்பது AB- யின் நீளமாகும். மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் x, y, z இவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலீடு செய்தால்

$$\frac{m_2 f_2 (v)}{m_1 f_1 (u)} = \frac{k - m_3 f_3 (w)}{m_3 f_3 (w)}$$

சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களிலும் ஒன்றைக் கூட்டிச் சுருக்க

$$\frac{m_2 f_2(v) + m_1 f_1 (u)}{m_1 f_1 (u)} = \frac{k}{m_3 f_3 (w)}$$

$$\text{அதாவது } \quad m_1 f_1 (u) + m_2 f_2 (v) = k\frac{m_1 f_1 (u)}{m_3 f_3 (w)}$$

இச்சமன்பாடு

$$f_1(u) + f_2(v) = \frac{f_1(u)}{f_3(w)}$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்,

$$m_1 = m_2 = \frac{km_1}{m_3}$$

அதாவது $m_1 = m_2$

$$k = m_3$$

இப்பொழுது அளவுகோல் சமன்பாடுகள்

$$x = m_1 f_1(u)$$

$$y = m_1 f_2(v)$$

$$z = m_3 f_3(w)$$

ஆகும். $k = m_3$ என்பதால், அமைக்கப்போகும் நேமவரையத்தில் u, v- அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை m_3 ஆக எடுத்துக்கொள்ளவேண்டும். u, v- அளவுகோல்களின் அளவுகோல் குணகங்கள் சமம் என்பதை நினைவிற் கொள்க. u, v- அளவுகோல்களின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லை.

$$f_1(u) - f_2(v) = \frac{f_1(u)}{f_3(w)}$$

என்ற வகைச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்க

$$x = m_1 f_1(u)$$

$$y = m_1 f_2(v)$$

என்ற அளவுகோல்கள் இரண்டையும் கீழிருந்து மேலாக இரு நிலைக்குத்துக் கோடுகளின் மீது அமைக்கவேண்டும். மற்ற யாவற்றையும்

$$f_1(u) + f_2(v) = \frac{f_1(u)}{f_3(w)}$$

என்றவகைச் சமன்பாட்டுக்கு அமைத்த நேமவரையத்தில் செய்ததுபோல் செய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 28

$W = S(W - W')$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. இதில்

W = காற்றில் ஒரு பொருளின் எடை, $(0 - 15)$கி.கி.

W' = நீரில் அப்பொருளின் எடை, $(0 - 10)$கி.கி.

S = அடர்த்தி எண், $(1 - 10)$.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$W - W' = \frac{W}{S}$$

என எழுதிக்கொள்ளலாம். இது

$$f_1(u) - f_2(v) = \frac{f_1(u)}{f_3(w)}$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 W$$
$$y = m_1 W'$$
$$z = m_3 S$$

எனக் கொள்க. W, W' - அளவுகோல்கள் இரண்டையும் கீழிருந்து மேலாக இரு நிலைக்குத்துக் கோடுகளின் மீது அமைக்கவேண்டும். W, W' - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரமும் m_3 - இன் மதிப்பும் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

W, W' - அளவுகோல்கள் இரண்டுக்கும் ஒரே அளவுகோல் குணகம் இருப்பதால், இரண்டு மாறிகளில் எதன் சார்புக்கு எல்லை வேறுபாடு மிகுதியாக உள்ளதோ அந்த மாறியின் சமன் பாட்டிலிருந்து அளவுகோல் குணகத்தைக் கணக்கிட்டுக் கொள்வது நல்லது. எனவே W - வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

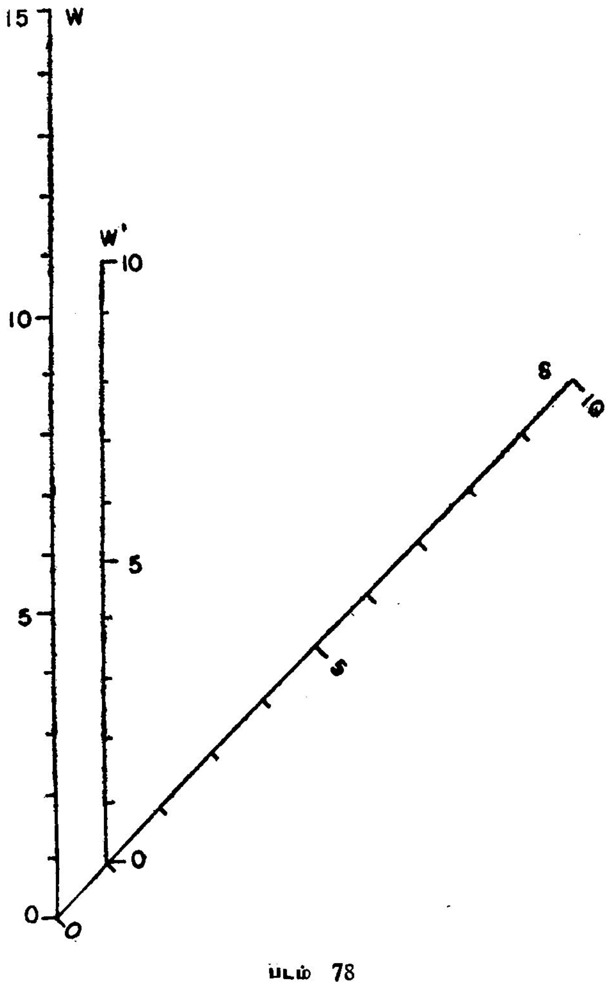
$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (15 - 0)$$
$$= 15 m_1$$

$m_1 = 0.8$ எனக் கொள்க.

W, W' - அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தொடக்கப் புள்ளிக்கான அளவீடு 0 ஆகும். W, W' - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடே S - அச்சாகும்;

மேலும் S - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளி, W - அளவு கோலின் தொடக்கப் புள்ளியுடன் ஒன்றியிருக்கும். W - அளவு கோலின் தொடக்கப்புள்ளி நேமவரையத்தில் குறிக்கப்படுவதால் S - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியும் நேமவரையத்தில் குறிக்கப்படுகிறது எனச் சொல்லலாம். எனவே S - இன் நெடுக்கத்தை 0 முதல் 10 முடிய எனக் கொள்க. S - இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_3\,(10 - 0) = 10m_3$$



படம் 78

$m_3 = 1$ எனக் கொள்க. எனவே W, W' - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை ஒரு செ.மீ. எனக் கொள்ளவேண்டும். இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 0.8\ W$$
$$y = 0\cdot 8\ W'$$
$$z = S$$

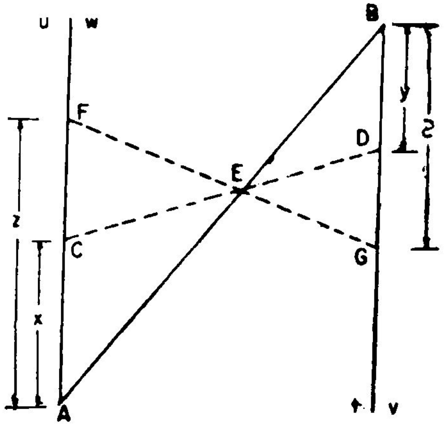
ஆகும். W, W', S - அளவுகோல்கள் மூன்றும் சீர் அளவுகோல்க ளாக இருப்பதால் இவற்றை அமைப்பது மிக எளிது. W, W'- அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகள் ஒரே மட்டத்தில் இருக்கத் தேவையில்லை. அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேம வரையம் படம் 78 - இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

14. $\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)} = \dfrac{f_3(w)}{f_4(t)}$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

இச் சமன்பாட்டுக்கு இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது நான்கு அளவுகோல்களையும் அமைத்து மிக எளிதில் நேமவரையத்தை அமைக்கலாம். u, v–அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடு களின் வெளிப் பக்கங்களின் மீதும், w, t-அளவுகோல்களை இந்த இணைகோடுகளின் உட்பக்கங்களின் மீதும் அமைக்க வேண்டும். u, w–அளவுகோல்கள் ஒரு கோட்டின் மீதும் v, t-அளவுகோல் கள் மற்றொரு கோட்டின் மீதும் இருக்கவேண்டும். u, w-அளவு கோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஒன்றியிருப்பதோடு அவை ஒரே திசையில் செல்லும். இதுபோன்று, v, t-அளவுகோல் களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஒன்றியிருப்பதோடு அவை u, w- அளவுகோல்கள் செல்லும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் செல்லும். அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் மூலை விட்டக் கோடு இயக்கு மையக் கோடாக (pivotal line) உதவு கிறது. இக் கோட்டின் மீது அளவுக் குறியீடுகள் எதுவும் தேவையில்லை. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1(u)$$
$$y = m_2 f_2(v)$$
$$z = m_3 f_3(w)$$
$$s = m_4 f_4(t)$$

எனக் கொள்க.



படம் 79

u, w-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியை *A* என்க. *v*, *t*-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியை *B* என்க (படம் 79). எனவே, *AB* என்பது இயக்கு மையக் கோடாகும். *u, v* மதிப்புகளை இணைக்கும் *CD* என்ற குறியிணைப்புக் கோடு *AB*-ஐ *E*-யில் வெட்டட்டும். *E*-யையும் *w*-வின் மதிப்புக்கான புள்ளி *F*-ஐயும் இணைக்கும் நேர்கோடு *t*-அளவுகோலை *G* என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். *u, v, w*-மதிப்புகளுக்கு ஒத்த *t*-யின் மதிப்பை *G* என்ற புள்ளி குறிக்குமெனில் அளவுகோல் குணகங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினைக் காணலாம். படம் 79-இல் *C, D, F, G* என்ற புள்ளிகள் முறையே *u, v, w, t*-மதிப்புகளைக் குறிப்பதால் $AC = x$; $BD = y$; $AF = z$; $BG = s$.

AEC, BED என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BE}$$

AEF, BEG என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AF}{BG} = \frac{AE}{BE}$$

எனவே, $$\frac{AC}{BD} = \frac{AF}{BG}$$

அதாவது $\frac{x}{y} = \frac{z}{s}$

x, y, z, s என்பவைகளுக்குச் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$\frac{m_1 f_1(u)}{m_2 f_2(v)} = \frac{m_3 f_3(w)}{m_4 f_4(t)}$$

இச் சமன்பாடு,

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்க வேண்டும் எனில்,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

என்ற தொடர்பு அளவுகோல் குணகங்களிடையே இருக்க வேண்டும். ஆகவே, நேமவரையத்தை அமைப்பதற்கு ஏதேனும் மூன்று அளவுகோல் குணகங்களை வசதிக்கேற்ப எடுத்துக் கொண்டு நான்காவது அளவுகோல் குணகத்தை

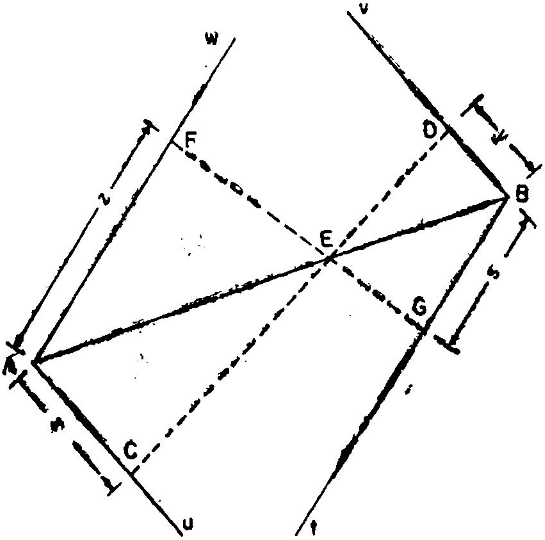
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

என்ற தொடர்பிலிருந்து கண்டுபிடித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

ஏதேனும் மூன்று மாறிகளின் மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டால் நான்காவது மாறிக்குரிய மதிப்பை அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்பது எப்படி? மதிப்பு கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று மாறிகளில் ஏதேனும் இரண்டு, வெளிப்பக்க அளவுகோல்கள் இரண்டுக்கோ அல்லது உட்பக்க அளவுகோல்கள் இரண்டுக்கோ உரியனவாக இருக்கும். எனவே, அந்த இரண்டு மாறிகளுக்குரிய குறியிணைப்புக் கோட்டை முதலில் அமைக்க வேண்டும். பின்னர் இக் குறியிணைப்புக் கோடும் இயக்கு மையக் கோடும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி வழியாக மூன்றாவது மாறியின் மதிப்புக்கான புள்ளிக்கு ஒரு நேர்கோடு வரைய வேண்டும். இக் கோடு நான்காவது மாறிக் குரிய அளவுகோலைத் தேவையான மதிப்பில் வெட்டும்.

$\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)} = \dfrac{f_3(w)}{f_4(t)}$ என்ற வகைச் சமன்பாட்டுக்கு வேறு வகையான நேமவரையம்

இச்சமன்பாட்டுக்கு நான்கு அளவுகோல்களையும் இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது அமைக்காமல், படம் 80-இல் காட்டிய வாறு u, v-அவுளகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும், w, t-அளவுகோல்களை வேறு இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும் அமைக்கலாம். u, w-அளவுகோல்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியே இவ்விரு அளவுகோல்களுக்கும் தொடக்கப் புள்ளி யாகும். இது போன்றே v, t-அளவுகோல்கள் வெட்டிக்கொள்ளும்



படம் 80

புள்ளியே இவ்விரு அளவுகோல்களுக்கும் தொடக்கப்புள்ளி யாகும். இவ்வாறு அமைக்கப்பட்ட நேமவரையம் உண்மை யிலேயே இரண்டு Z-விளக்கப் படங்களின் ஒருங்கிணைப்பு (combination) ஆகும். படத்தில் உள்ள குறுக்குக்கோடு அளவு கோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடாகும். இக் கோடு இயக்கு மையக் கோடாகப் பயன்படுகிறது.

AEC, *BED* என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{BE}$$

AEF, *BEG* என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AF}{BG} = \frac{AE}{BE}$$

$$\text{எனவே} \quad \frac{AC}{BD} = \frac{AF}{BG}$$

$$\text{அதாவது} \quad \frac{x}{y} = \frac{z}{s}$$

இதே தொடர்புதான் முந்திய அமைப்பிலும் கிடைத்தது. எனவே, இந்த அமைப்பிலும் அளவுகோல் குணகங்களிடையே உள்ள தொடர்பு

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

ஆகும். *u*, *w*-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள கோணமும் *v*, *t* - அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள கோணமும் சமம். இக் கோணம் எதுவாக இருப்பினும்

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

என்ற தொடர்பில் மாற்றம் இருக்காது. ஆகவே, அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள கோணத்தை விரிகோணமாகவோ (obtuse angle), குறுங்கோணமாகவோ (acute angle), செங்கோணமாகவோ (right angle) எடுத்துக் கொள்ளலாம். எளிமையைக் கருதிச் செங்கோணமாக எடுத்துக் கொள்வது நல்லது.

எடுத்துக்காட்டு 29

$R_1 = R_2\sqrt{\frac{W_1}{W_2}}$ என்ற வாய்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமை. R_1 (25 — 70); R_2 (25 — 70); W_1 (15 — 100): W_2 (15 — 100).

இருபடி மூல அளவுகோல்களைத் தவிர்ப்பதற்காக, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{W_1}{W_2}$$

என்ற அமைப்பில் எழுதிக் கொள்க. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 R_1^2$$

$$y = m_2 R_2^2$$

$$z = m_3 W_1$$

$$s = m_4 W_2$$

எனக் கொள்க. இங்கு $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{m_3}{m_4}$

R_1, R_2 - அளவுகோல்களின் கீழ் எல்லைகள் 25 என்றாலும் இந்த அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை நேமவரையத்தில் குறிக்கவேண்டியிருப்பதால் R_1, R_2 இவற்றின் நெடுக்கங்களை 0 முதல் 70 முடிய எனக் கொள்க. இதே காரணத்திற்காக W_1, W_2 இவற்றின் நெடுக்கங்களை 0 முதல் 100 முடிய எனக் கொள்க.

R_1 - அளவுகோலுக்கு

அளவுகோல் நீளம் $= m_1 (70^2 - 0)$

$= 4900\, m_1$

$m_1 = \dfrac{1}{500}$ எனக் கொள்க. அளவுகோல் நீளத்தை $4900\, m_1$ எனப் பார்த்தவுடன் $m_1 = \dfrac{1}{490}$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவே நினைக்கக் கூடும். 10 செ. மீ. நீளத்தில்

$$x = \frac{1}{490} R_1^2$$

என்ற அளவுகோலை அமைப்பதைக் காட்டிலும், 9·8 செ.மீ. நீளத்தில்

$$x = \frac{1}{500} R_1^2$$

என்ற அளவுகோலை அமைப்பதே எளிது.

R_2 - அளவுகோலுக்கு

அளவுகோல் நீளம் $= m_2 (70^2 - 0)$

$= 4900\ m_2$

$m_2 = \frac{1}{500}$ எனக் கொள்க.

W_1-அளவுகோலுக்கு

அளவுகோல் நீளம் $= m_3 (100 - 0)$

$= 100\ m_3$

$m_3 = \frac{1}{10}$ எனக் கொள்க. W_2-ன் நெடுக்கம் கொடுக்கப்பட்டிருந்தபோதும் m_1-ன் மதிப்பை

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

என்ற தொடர்பிலிருந்துதான் கண்டுபிடித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$m_4 = \frac{m_2 m_3}{m_1}$$

$$= \frac{1}{10}$$

இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

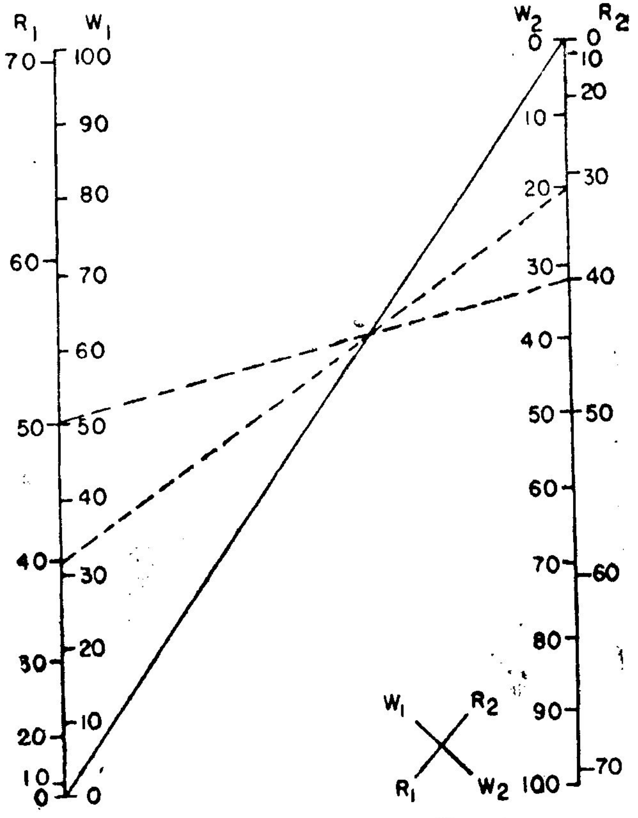
$$x = \frac{1}{500} R_1^2$$

$$y = \frac{1}{500} R_2^2$$

$$z = \frac{1}{10} W_1$$

$$s = \frac{1}{10} W_2$$

ஆகும்.



படம் 81

R_1, R_2-அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் வெளிப் பக்கங்களின் மீதும், W_1, W_2-அளவுகோல்களை இந்த இணை கோடுகளின் உட்பக்கங்களின் மீதும், R_1, W_1-அளவுகோல்கள் ஒரு கோட்டின் மீது இருக்குமாறும், R_2, W_2-அளவுகோல்கள் மற்றொரு கோட்டின் மீது இருக்குமாறும் அமைக்க வேண்டும். R_1, W_1-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஒன்றியிருக்குமாறு இந்த அளவுகோல்களைக் கீழிருந்து மேலாக அமைக்கவும். R_2, W_2-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஒன்றியிருக்குமாறு இந்த அளவுகோல்களை மேலிருந்து கீழாக அமைக்கவும் (படம் 81). R_1, R_2-அளவுகோல்களை அமைக்க வெவ்வேறு

அளவீடுகளுக்கான தூரங்களைக் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகளி லிருந்து கணக்கிட்டுக் கொள்ள வேண்டும். W_1, W_2-அளவு கோல்களில் ஒரு செ.மீ. நீளம் 10 அலகுகளைக் குறிக்கும்.

அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்திற்குப் பக்கத்தில் வரையப் பட்டுள்ள உதவிப்படம் எந்தெந்த மாறிகளை இணைத்துக் குறி யிணைப்புக் கோடுகளை வரைய வேண்டும் என்பதைக் காட்டு கிறது. $R_1 = 50$, $R_2 = 40$, $W_2 = 20$ எனில் W_1-ன் மதிப்பைக் காணப் படத்தில் குறியிணைப்புக் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. W_1-ன் மதிப்பு ஏறத்தாழ 31 எனத் தெரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 30

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$ என்ற வாய்பாட்டுக்கு ஒரு

நேமவரையம் அமை. $a\ (0-100)$; $A\ (0°-180°)$; $b\ (0-100)$; $B\ (0°-180°)$.

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 a$$
$$y = m_2 \sin A$$
$$z = m_3 b$$
$$s = m_4 \sin B$$

எனக் கொள்க. a-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (100 - 0)$$
$$= 100\, m_1$$

$m_1 = 0{\cdot}08$ எனக் கொள்க. இதேபோல $m_3 = 0{\cdot}08$ எனக் கொள்க. A, B- அளவுகோல்களில் θ என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளி $(180-\theta)$ என்ற அளவீட்டையும் குறிக்கும், ஏனெனில் $\sin \theta° = \sin(180-\theta)°$ எனவே, 0 முதல் 90 முடிய உள்ள அளவீடு

களுக்குரிய அளவுக் குறியீடுகளையே 180 முதல் 90 முடிய உள்ள அளவீடுகளுக்கும் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். எனவே, A, B-அளவுகோல்களின் நெடுக்கங்களை 0 முதல் 90 முடிய எனக் கொள்க. A-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 [\sin 90^\circ - \sin 0^\circ]$$
$$= m_2$$

$m_2 = 10$ எனக் கொள்க.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

என்பதால்
$$m_4 = \frac{m_2 m_3}{m_1}$$
$$= 10$$

இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 0{\cdot}08\,a$$
$$y = 10 \sin A$$
$$z = 0{\cdot}08\,b$$
$$s = 10 \sin B$$

ஆகும்.

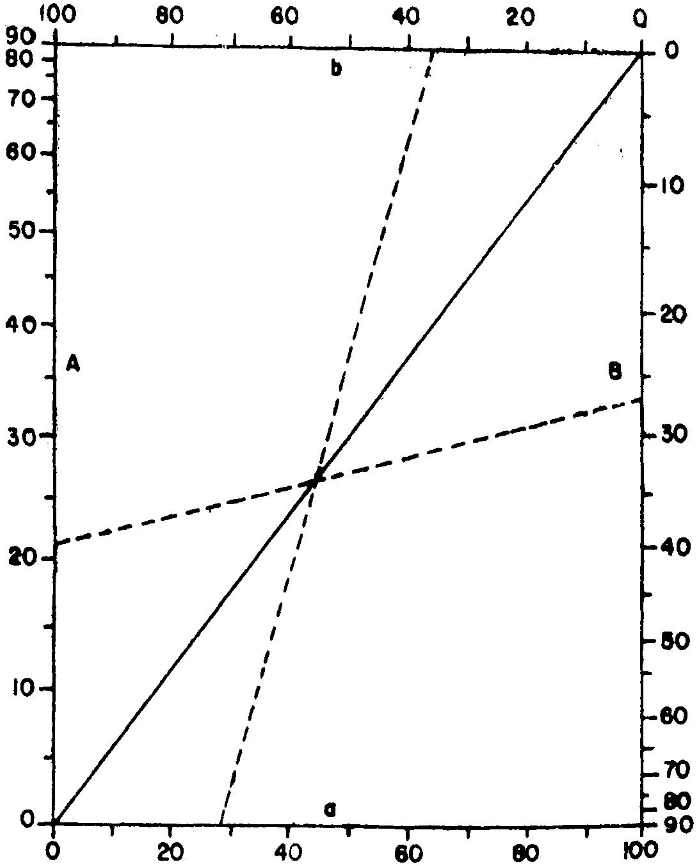
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

என்பதை

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

எனவும் எழுதிக் கொள்ளலாம். எனவே a, b - அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும், A, B - அளவுகோல்களை வேறு இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும் அமைத்துக் கொள்க. வசதிக்காக நான்கு அளவுகோல்களையும் ஒரு செவ்வகத்தின் நான்கு பக்கங்களின் மீது அமைத்துக் கொள்ளலாம். a, A - அளவுகோல்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி இவ்விரு அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியாக இருக்குமாறும்,

b, *B*-அளவுகோல்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி *b*, *B*-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியாக இருக்குமாறும் அளவுகோல்களை அமைக்கவேண்டும் (படம் 82). தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் மூலைவிட்டக்கோடு, இயக்கு மையக் கோடாகப் பயன்



படம் 82

படுகிறது. *a*, *b*-அளவுகோல்களில், 0·8 செ.மீ. நீளம் 10 அலகுகளைக் குறிக்கிறது. வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்கான தூரங்களைக் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகளிலிருந்து கணக்கிட்டு *A*, *B*-அளவுகோல்களை அமைக்கவேண்டும்.

அட்டவணை 18

A அல்லது B (பாகை)	10 sin A அல்லது 10 sin B	A அல்லது B (பாகை)	10 sin A அல்லது 10 sin B
0	0	50	7.660
5	0.872	55	8.192
10	1.736	60	8.660
15	2.588	65	9.063
20	3.420	70	9.397
25	4.226	75	9.659
30	5.000	80	9.848
35	5.736	85	9.962
40	6.428	90	10.000
45	7.071		

அட்டவணை 18-இல் 10 sin A அல்லது 10 sin B என்பதன் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவை A அல்லது B-அளவு கோல்களில் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்களைச் செ. மீட்டரில் குறிக்கின்றன. செ. மீ., மி. மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி A, B-அளவுகோல்களை அமைக்கவேண்டும்.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு Z - விளக்கப் படங்கள் அமை (1—18).

1. $v = \frac{2\pi r}{T}$

v = திசை வேகம், செ.மீ./நொடி

r = ஆரம், (0 – 20) செ.மீ.

T = அலைவு நேரம், (0—10) நொடி

2. $P = \frac{E^2}{R}$

P = மின்னோட்டத்திற்குத் தேவையான திறன், வாட்டு

E = மின்னழுத்தம், (0 - 440) வோல்ட்டு

R = மின்தடை, (0 - 3000) ஓம்

3. $s^2 = AR$

s = வானூர்தியில் (airplane) இறக்கை முனை இடை நீளம் (wing span), (10—15) மீ.

A = இறக்கையின் பரப்பு, மீ^{2}.

R = நோக்கு விகிதம் (aspect ratio). (4 - 7)

4. $W = \frac{M}{840d^2}$

W = கம்பியின் முறிவுத் திரிபு (breaking strain), கி.கி./செ.மீ.^{2}

M = கம்பியின் முறிவுச் சுமை (breaking load), (50—1000) கி.கி.

d = கம்பியின் விட்டம், (0·1 - 0·5) செ.மீ.

5. $S = \left(\frac{G}{A}\right)^2$

S = வாயுவின் (gas) அடர்த்தி எண், (0·1 - 1·4)

G = வாயுவின் புறவொழுக்கு நேரம் (time of efflux), (40 - 140) நொடி

A = காற்றின் புறவொழுக்கு நேரம், (115 - 155) நொடி

6. $F = \frac{\pi d^2 p}{4}$

F = வாயு உருளையின் அடிப்பக்கத்தின் மேல் உள்ள மொத்த அழுத்தம் (pressure), (100—2000) கி.கி.

d = உருளையின் உள்விட்டம், (0·5 - 2) மீ.

p = இறுக்கப்பட்ட வாயுவின் (compressed gas) அளவு, கி.கி./மீ.^{2}

7. $(u + 5)\, v^2 = (2w - 1)$

$u\,(0 - 10)$; $v\,(1 - 5)$; $w\,(2 - 8)$

8. $u = 0{\cdot}35\left(\frac{L - V}{V}\right)$

$L\,(3 - 60)$; $V\,(0{\cdot}1 - 3)$; $u\,(0{\cdot}3 - 10)$

9. $V = \left(\frac{E - E'}{E'}\right) 100$

V = மின்னழுத்தச் சீர்மை (voltage regulation), நூற்று வீதம்.

E = சுமையில்லா மின்னழுத்தம், (100 - 1000) வோல்ட்டு.

E' = முழுச்சுமை மின்னழுத்தம், (100 - 1000) வோல்ட்டு.

10. $x = r \cos \theta$

$x\,(6 - 10)$; $\theta\,(0^\circ - 90^\circ)$

11. $\cot \theta = \frac{\pi d}{h}$

θ = திருகுசுழல் கோணம் (helix angle)

d = விட்டம், (0·5 - 2) செ.மீ.

h = புரியிடைத் தூரம் (pitch), (0·1 - 0·5) செ. மீ.

12. $c = \dfrac{480}{3.05 + \dfrac{m}{\sqrt{R}}}$

c = பேசினின் கெழு (Bazin's co-efficient)

m = சொரசொரப்புக் கெழு, (0·01 - 2)

R = நீரியல் ஆரம், (10 - 900) செ.மீ.

13. $u^v = 4w$

$u\ (1{\cdot}2 - 4)\ ;\ v\ (10 - 20)$

14. $r = G^{\frac{1}{n-1}}$

$r\ (1{\cdot}2 - 2{\cdot}2)\ ;\ n\ (3 - 8)\ ;\ G\ (2 - 8)$

15. $a^2 + 2b^3 = \frac{a^2}{5c}$

$a\ (0 - 16)\ ;\ b\ (0 - 5)\ ;\ c\ (0{\cdot}02 - 0{\cdot}18)$

16. $t = \frac{Pd}{2f}$

P = அழுத்தம், (2 - 8) கி.கி./செ.மீ.^{2}

d = குழாயின் விட்டம், (25 - 150) செ.மீ.

t = குழாயின் தடிப்பு, (0·3 - 1·5) செ.மீ.

f = தகைவு, (250 - 1200) கி.கி./செ.மீ.^{2}

17. $\frac{ws^2}{8h} = D$

w = எடை, (0·8 — 4) கி.கி./மீ.

s = இருமுனை இடைநீளம் (span), (60 - 360) மீ.

h = கிடை இழுவிசை (horizontal tension), (500 - 1000) கி.கி.

D = கம்பி வடத்தின் (cable) தொய்வு (sag), மீ.

18. $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$, (கெப்ளரின் மூன்றும் விதி) (Kepler's third law)

T_1 = நேரம், (0·25 - 25) ஆண்டுகள்

T_2 = நேரம், (0·25 - 25) ஆண்டுகள்

r_1 = தூரம், $(6 \times 10^7 - 600 \times 10^7)$ கி.மீ.

r_2 = தூரம், $(6 \times 10^7 - 600 \times 10^7)$ கி.மீ.

5. இணைக்குறியிணைப்புக் கோடுகளும் செங்குத்துக் குறியிணைப்புக் கோடுகளும்

(Parallel Index lines and Perpendicular Index lines)

15. $\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

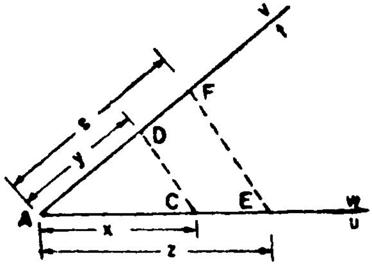
இச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும் முறைகள் சில முந்திய அதிகாரத்தில் விளக்கப்பட்டன. அந்த முறைகளில் அமைத்த நேமவரையங்களைப் பயன்படுத்த இயக்கு மையக் கோட்டின் உதவி தேவைப்பட்டது. மேலே உள்ள சமன்பாட்டுக்கு இயக்கு மையக்கோடு எதுவுமின்றி நேமவரையம் அமைக்கும் முறைகள் சிலவற்றை இப்பொழுது காணலாம். இந்த முறைகளில் அமைக்கப்போகும் நேமவரையங்களைப் பயன்படுத்த இணையான இரண்டு குறியிணைப்புக் கோடுகளின் உதவியோ, செங்குத்தான இரண்டு குறியிணைப்புக் கோடுகளின் உதவியோ தேவைப்படும்.

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1\ (u)$$
$$y = m_2 f_2\ (v)$$
$$z = m_3 f_3\ (w)$$
$$s = m_4 f_4\ (t)$$

எனக் கொள்க. நான்கு அளவுகோல்களையும் படம் 83-இல் காட்டியபடி இரண்டு வெட்டிக் கொள்ளும் நேர்கோடுகள் (intersecting straight lines) மீது அமைக்க வேண்டும். இரண்டு கோடுகளுக்கும் இடையில் உள்ள கோணத்தை வசதிக்கேற்ப எடுத்துக்கொள்ளலாம். ஒவ்வொரு அளவுகோலையும் எந்தக் கோட்டின் எந்தப் பக்கத்தின் மீது அமைக்கவேண்டும் என்று படத்தில் தெளிவாகக் காட்டப்பட்டுள்ளது. இரண்டு நேர்

கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியே நான்கு அளவுகோல் களுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாகும். கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையிலுள்ள u, v-மதிப்புகளை இணைக்கும் CD என்ற நேர்கோடும், w, t-மதிப்புகளை இணைக்



படம் 83

கும் EF என்ற நேர்கோடும் இணையாக இருக்குமாறு அளவு கோல்களை அமைத்தால் அளவுகோல் குணகங்களிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? படம் 83-இல் ACD, AEF என்ற வடி வொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AF}$$

அதாவது $$\frac{x}{y} = \frac{z}{s}$$

x, y, z, s இவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$\frac{m_1 f_1(u)}{m_2 f_2(v)} = \frac{m_3 f_3(w)}{m_4 f_4(t)}$$

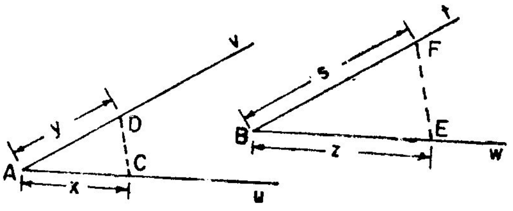
இச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்க வேண்டுமெனில்,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

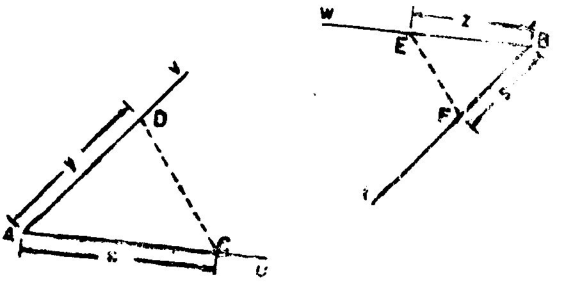
முந்திய அதிகாரத்திலும் இதே தொடர்புதான் அளவுகோல் குணகங்களிடையே இருந்தது என்பது நினைவிருக்கலாம்.

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குப் படம் 84, 85 - இவற்றில் காட்டியுள்ள அமைப்புகளிலும் நேமவரையம் அமைக்கலாம். இவ்வமைப்புகளில் u, w-அளவுகோல்கள் இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும், v, t-அளவுகோல்கள் வேறு இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்



படம் 84



படம் 85

புள்ளி A ஆகும். w, t-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளி B ஆகும். CD, EF என்ற இரு குறியிணைப்புக்கோடுகளும் இணைகோடுகளாகும்.

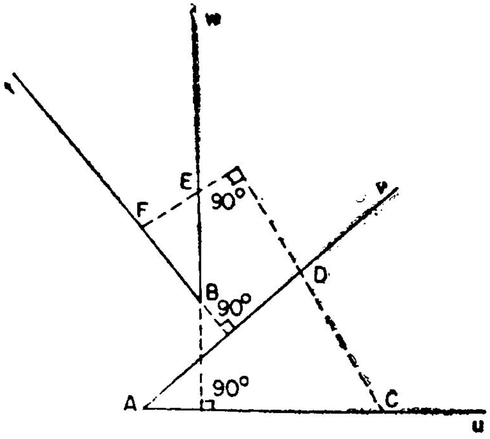
$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குப் படம் 86 - இல் காட்டியவாறும் நேமவரையம் அமைக்கலாம். இப் படத்தில் u, w - அளவுகோல்கள் இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளின்மீது அமைக்கப்பட்டுள்ளன. v, t - அளவுகோல்கள் வேறு இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளின் மீது அமைக்கப்பட்டுள்ளன. u, v - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளி, இவ்விரு அளவுகோல்களும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியான A ஆகும். w, t - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்

புள்ளி, இந்த இரண்டு அளவுகோல்களும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியான B ஆகும். u, v - மதிப்புகளை இணைக்கும் CD என்ற குறியிணைப்புக்கோடும், w, t - மதிப்புகளை இணைக்கும் EF என்ற குறியிணைப்புக் கோடும் செங்குத்தாக இருக்குமாறு அளவு கோல்களை அமைத்தால், அளவுகோல் குணகங்களிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? ACD, BEF என்ற இரு முக்கோணங்களும் வடிவொத்தன ஆதலால்

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

என்ற தொடர்பே இதற்கும் கிடைக்கும்.



படம் 86

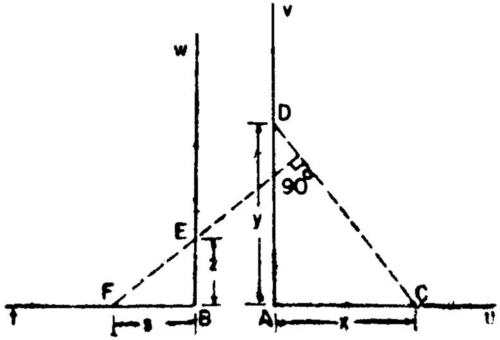
u, v - அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள கோணத்தை வசதிக்காக $90°$ என எடுத்துக்கொண்டு படம் 87 - இல் காட்டிய படியும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையத்தை அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

w, v - அளவுகோல்களை ஒரே நேர்கோட்டின்மீது பக்கத்திற்கு ஒன்றாகவும் அமைத்துக்கொள்ளலாம். இவ்வாறு அமைக்கப் பட்ட நேமவரையத்தின் அமைப்புப்படம் 88 - இல் காட்டப் பட்டுள்ளது.

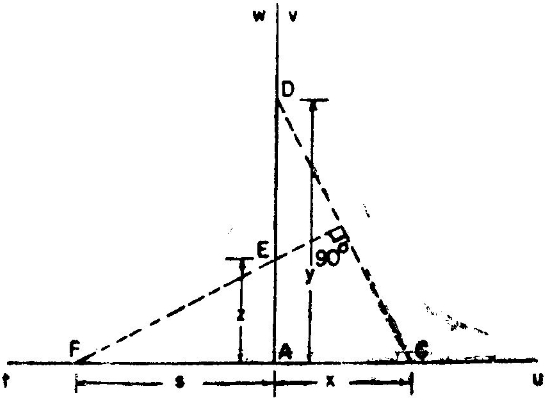
இவ்வாறு

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற வகைச் சமன்பாட்டுக்கு இணையளவுகோல் நேமவரையம், Z - விளக்கப் படம், இணைக் குறியிணைப்புக் கோடுகளைக் கொண்ட நேமவரையம், செங்குத்துக் குறியிணைப்புக் கோடுகளைக் கொண்ட நேமவரையம் போன்ற பல்வேறுவகையான நேமவரையங்களை அமைக்கலாம்.



படம் 87



படம் 88

எடுத்துக்காட்டு 31

$\frac{u+1}{v^2} = \frac{\sqrt{w}}{3t}$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு இணைக்குறியிணைப்புக் கோடுகளையோ அல்லது செங்குத்துக் குறியிணைப்புக் கோடுகளையோ பயன்படுத்தும் நேமவரையம் அமை. *u (0 - 10) ; v (2 - 5) ; w (1 - 25) ; t (0.5 - 3).*

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 (u + 1)$$
$$y = m_2 v^2$$
$$z = m \sqrt{w}$$
$$s = m_4 (3t)$$

எனக் கொள்க. நான்கு அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளையும் குறித்துக் கொண்டால் நேமவரையம் அமைக்க வசதியாக இருக்கும். எனவே அளவுகோல் குணகங்களைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்வதற்கு u, v, w, t - என்பவற்றின் நெடுக்கங்களை முறையே (—1 முதல் 10 முடிய) , (0 - 5), (0 - 25), (0 - 3) எனக் கொள்க. $m_1 = 0.8$, $m_2 = 0.4$, $m_3 = 2$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

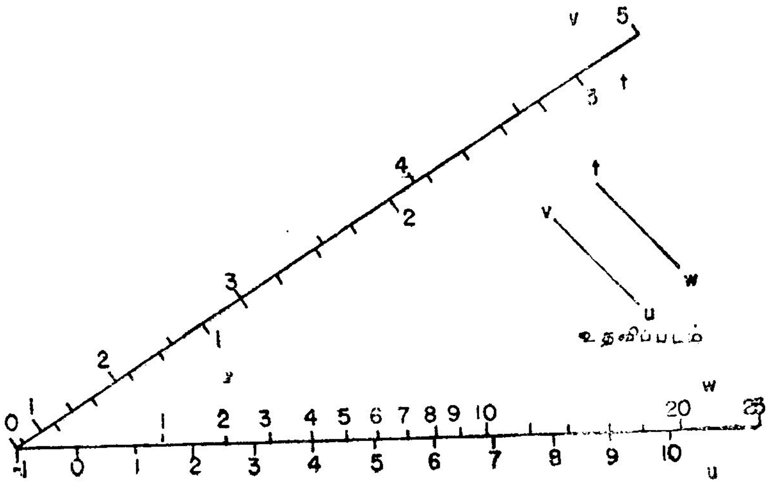
என்பதால் $$m_4 = \frac{m_2 m_3}{m_1} = 1$$

எனவே குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 0.8 (u + 1)$$
$$y = 0.4 v^2$$
$$z = 2 \sqrt{w}$$
$$s = 3t$$

ஆகும். நான்கு அளவுகோல்களையும் இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோடுகளின் மீது அமைக்கவேண்டும் (படம் 89). இரண்டு நேர்கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே நான்கு அளவு கோல்களுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்குச் செங்குத்துக் குறியிணைப்புக் கோடுகளைக் கொண்ட நேமவரையம் அமைக்க, வசதியை முன்னிட்டு அளவுகோல் குணகங்களை வேறு மாதிரியாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். $m_1 = 0.5$, $m_3 = 1$, $m_4 = 0.4$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே



படம் 89

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4}$$

என்ற தொடர்பிலிருந்து $m_2 = 0.2$ எனக் கிடைக்கும். இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 0.5\,(u+1)$$
$$y = 0.2\,v^2$$
$$z = \sqrt{w}$$
$$s = 1.2\,t$$

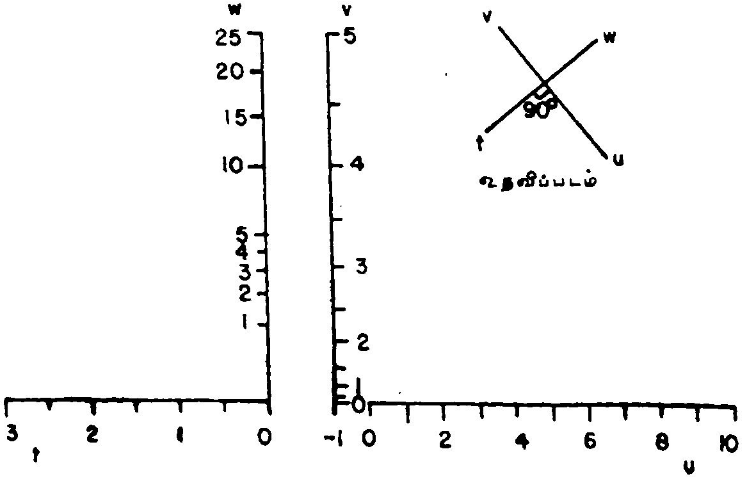
ஆகும்.

அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையம் படம் 90-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

16. $f_1(u) - f_2(v) = f_3(w) - f_4(t)$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

இச் சமன்பாட்டுக்கு நான்கு இணையளவு கோல்களைக் கொண்ட நேமவரையத்தை அமைக்கும் முறையை அதிகாரம் மூன்றில் படித்தது நினைவிருக்கலாம். அந்த முறையில் அமைக்கப் பட்ட நேமவரையத்தில் பயன்படுத்தப்பட்ட குறியிணைப்புக்

கோடுகள் இரண்டும் வெட்டிக்கொள்ளும் வகையைச் சேர்ந்தன இச் சமன்பாட்டுக்கு இரண்டு இணையான குறியிணைப்புக் கோடுகளையோ அல்லது இரண்டு செங்குத்துக் குறியிணைப்புக் கோடுகளையோ பயன்படுத்தும் வகையில் நேமவரையம் அமைக்கும் முறைகளை இப்பொழுது காணலாம்.



படம் 90

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1 (u)$$

$$y = m_2 f_2 (v)$$

$$z = m_3 f_3 (w)$$

$$s = m_4 f_4 (t)$$

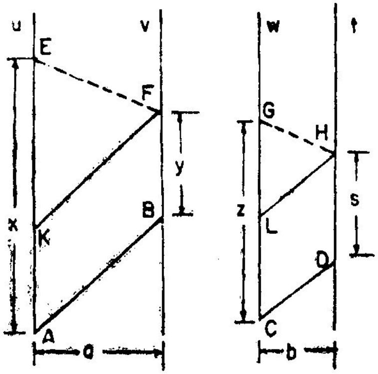
எனக் கொள்க. கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v- மதிப்புக்களை இணைக்கும் EF என்ற குறியிணைப்புக்கோடும், w, t- மதிப்புகளை இணைக்கும் GH என்ற குறியிணைப்புக்கோடும் இணையாக இருக்குமாறு நான்கு அளவு கோல்களையும் படம் 91- இல் காட்டியபடி நான்கு இணைகோடு களின்மீது ஒரே திசையில் செல்லுமாறு அமைத்துக் கொள்க. u, v அளவுகோல்களின் இடைத்தூரத்தை a செ.மீ. என்றும், w, t- அளவுகோல்களின் இடைத்தூரத்தை b செ.மீ. என்றும் கொள்க. u, v, w, t- அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை

முறையே A, B, C, D எனவும், இப்புள்ளிகளுக்கான அளவீடுகளை முறையே u_0, v_0, w_0, t_0 எனவும் கொள்க. எனவே $f_1(u_0) = 0$; $f_2(v_0) = 0$; $f_3(w_0) = 0$; $f_4(t_0) = 0$.

$$\text{ஆகவே } f_1(u_0) - f_2(v_0) = f_3(w_0) - f_4(t_0)$$

இதிலிருந்து u, v, w, t - அளவுகோல்களின் தொடர்ச்சப் புள்ளிகளுக்கான அளவீடுகள்

$$f_1(u) - f_2(v) = f_3(w) - f_4(t)$$



படம் 91

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கின்றன எனத் தெரிகிறது. எனவே, AB, CD என்ற நேர்கோடுகள் இணையானவை. K, L என்ற புள்ளிகள் முறையே u, w - அச்சுகளின் மீது இருக்குமாறு AB - க்கு இணையாக FK என்ற கோட்டையும், CD - க்கு இணையாக HL என்ற கோட்டையும் வரைக. AB, CD என்பன இணைகோடுகள் ஆதலால் KF, LH என்பன இணைகோடுகள் ஆகும். படம் 91 - இல், KEF, LGH என்பன வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகும். எனவே,

$$\frac{KE}{a} = \frac{LG}{b}$$

$$\text{ஆனால், } KE = AE - AK$$
$$= AE - BF$$
$$LG = CG - CL$$
$$= CG - DH$$

$$\text{ஆகவே,}\quad \frac{AE - BF}{a} = \frac{CG - DH}{b}$$

$AE = x$, $BF = y$, $CG = z$, $DH = s$ என்பதால்

$$\frac{x - y}{a} = \frac{z - s}{b}$$

x, y, z, s என்பவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$\frac{m_1 f_1(u) - m_2 f_2(v)}{a} = \frac{m_3 f_3(w) - m_4 f_4(t)}{b}$$

இச்சமன்பாடு

$$f_1(u) - f_2(v) = f_3(w) - f_4(t)$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்

$$\frac{m_1}{a} = \frac{m_2}{a} = \frac{m_3}{b} = \frac{m_4}{b}$$

எனவே $m_1 = m_2$

$$m_3 = m_4$$

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{a}{b}$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைப்பதற்கு, அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1(u)$$

$$y = m_1 f_2(v)$$

$$z = m_3 f_3(w)$$

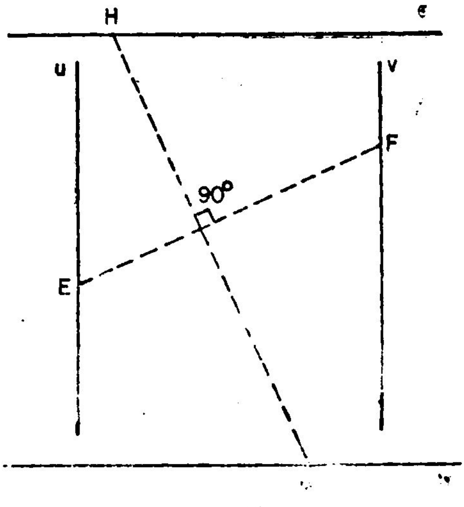
$$s = m_3 f_4(t)$$

எனக் கொள்ளவேண்டும். மேலும் u, v - அளவுகோல்களின் இடைத்தூரத்திற்கும், w, t - அளவுகோல்களின் இடைத்தூரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் $m_1 : m_3$ என இருக்கவேண்டும். ஏதேனும் மூன்று அளவுகோல்களை அமைத்த பின்னர், நான்காவது அளவுகோலை அமைப்பதன் முதற்கட்டமாகப் பொருத்தக் கோடுகளை வரைந்துகொள்ளவேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, t - அளவுகோலை இறுதியாக அமைப்பதாகக் கொள்க. இப்பொழுது, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w, t, - மதிப்புகளின் ஒரு தொகுதியைத் தேர்ந்

தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். தேர்ந்தெடுத்துக் கொண்ட மதிப்புகளை u_1, v_1, w_1, t_1 என்க. எனவே, u_1, v_1 என்ற அளவீடுகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோட்டுக்கு இணையாக, w_1 என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளிவழியே ஒரு கோடு வரையவேண்டும். இக் கோடு t- அச்சை வெட்டுமிடத்தில் t_1 என அளவீடு செய்ய வேண்டும். பின்னர் t-அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். பொருத்தக் கோடுகளுக்கான புள்ளிகளைக் கிடை அடிக்கோட்டின் மீது இருக்குமாறு எடுத்துக் கொண்டால் வசதியாக இருக்கும்.

$$f_1(u) - f_2(v) = f_3(w) - f_4(t)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு, அளவுகோல் சமன்பாடுகளை மேற்கூறிய அமைப்புக்குள்ளவாறு எடுத்துக்கொண்டு, படம் 92-இல் காட்டியவாறும் நேமவரையம் அமைக்கலாம். இப்படத்தில் u, v- அளவுகோல்கள் இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒரேதிசையில் செல்லுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளன. u, w- அளவுகோல்கள் செங்குத்தாக இருக்குமாறும், w, t - அளவுகோல்கள் வேறு இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒரே திசையில் செல்லுமாறும்



படம் 92

அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இந்த அமைப்பிலும் u, v - அளவுகோல்களின் இடைத்தூரத்திற்கும், w, t - அளவுகோல்களின் இடைத்தூரத்திற்கும் இடையே உள்ள விகிதம் $m_1 : m_3$ ஆகும். இந்த அமைப்பில், சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v - மதிப்புகளை இணைக்கும் EF என்ற குறியிணைப்புக்கோடும்,

w, t - மதிப்புகளை இணைக்கும் GH என்ற குறியிணைப்புக்கோடும் செங்குத்தாக இருக்கும். எனவே பொருத்தக்கோடுகளை வரைந்து கொள்ளும்பொழுது, u, v - மதிப்புகளை இணைக்கும் கோடும், w, t- மதிப்புகளை இணைக்கும் கோடும் செங்குத்தாக இருக்கவேண்டும் என்பதை நினைவிற் கொள்க.

$$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w) + f_4(t)$$

என்ற வகைச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்க, இதை

$$f_1(u) - f_3(w) = f_4(t) - f_2(v)$$

என்ற அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக்கொண்டு மேற்கூறிய முறைகளைப் பின்பற்றலாம்.

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற சமன்பாட்டை

$$\log f_1(u) - \log f_2(v) = \log f_3(w) - \log f_4(t)$$

என மடக்கை அமைப்பில் எழுதிக்கொண்டால், இதற்கு இணைக் குறியிணைப்புக் கோடுகளையோ அல்லது செங்குத்துக் குறியிணைப் புக் கோடுகளையோ பயன்படுத்தும் நேமவரையம் அமைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 32

$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1.4}$ என்ற வாய்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. இதில்

P_1 = தொடக்க அழுத்தம், (1 - 40) கி.கி. /செ.மீ.^{2}

P_2 = இறுதி அழுத்தம், (0.5 - 35) கி.கி./ செ.மீ.^{2}

V_1 = தொடக்கக் கன அளவு, (0.25 - 3) செ.மீ.^{3}

V_2 = இறுதிக் கன அளவு, (0.4 - 4) செ.மீ.^{3}

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\log P_1 - \log P_2 = 1.4 \log V_2 - 1.4 \log V_1$$

என மடக்கை அமைப்பில் எழுதிக் கொள்க.

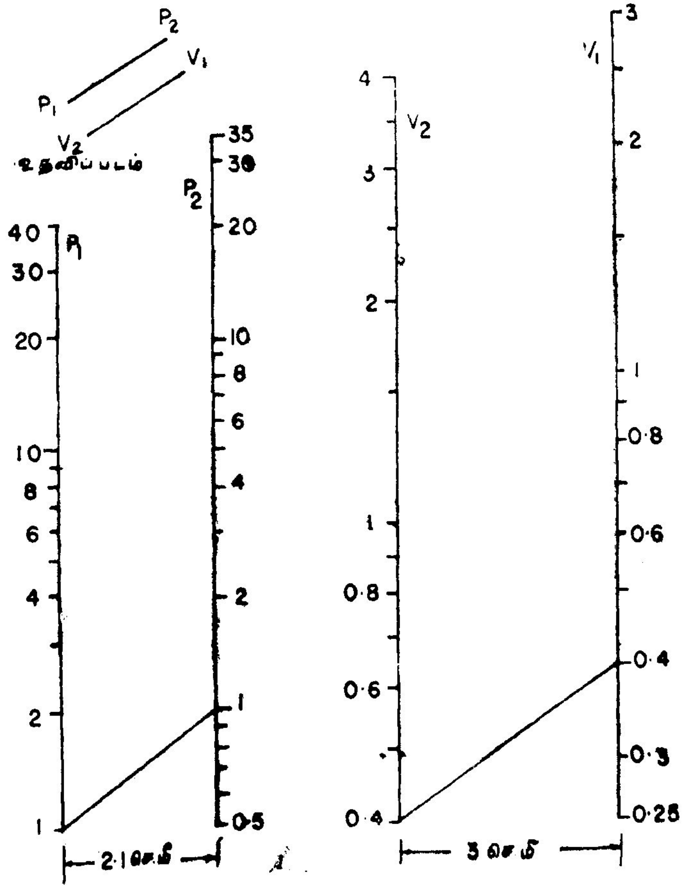
அளவுகோல் சமன்பாடுகளை $x = m_1 \log P_1$

$y = m_1 \log P_2$

$z = m_3 \, [1.4 \log V_2]$

$s = m_3 \, [1.4 \log V_1]$

எனக் கொள்க. P_1, P_2- அளவுகோல்கள் இரண்டுக்கும் ஒரே அளவுகோல் குணகத்தைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்வதால், இரண்டு மாறிகளில் எதன் சார்புக்கு எல்லை வேறுபாடு மிகுதி



படம் 93

யாக உள்ளதோ அந்த மாறியின் சமன்பாட்டிலிருந்து அளவுகோல் குணகத்தைத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்வது நல்லது. எனவே, P_2- இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (\log 35 - \log 0.5)$$
$$= 1.8451\, m_1$$

$m_1 = 5$ எனக் கொள்க. இதேபோல V_1-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = 1.4\, m_3 [\log 3 - \log 0.25]$$
$$= 1.4\, m_3 (1.0792)$$

$m_3 = \frac{10}{1.4}$ என்க் கொள்க. எனவே, குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 5 \log P_1$$
$$y = 5 \log P_2$$
$$z = 10 \log V_2$$
$$s = 10 \log V_1$$

ஆகும்.

P_1, P_2 - அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம்:

V_2, V_1-அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம்

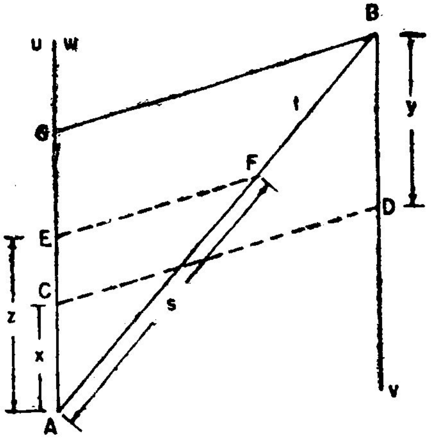
$$= m_1 ; m_3$$
$$= 7 : 10$$

எனவே, இத் தூரங்களை முறையே 2.1 செ. மீ., 3 செ. மீ. எனக் கொள்ளலாம். P_1, P_2, V_2 - அளவுகோல்களை மடக்கை அளவு கோல்களின் உதவியால் எளிதில் அமைக்கலாம் (படம் 93). V_1 - அளவுகோலை அமைக்கத் தொடங்கு முன் பொருத்தக் கோடுகளுக்கான புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ள வேண்டும். $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, $V_2 = 0.4$ எனில் $V_1 = 0.4$. எனவே, $P_1 = 1$, $P_2 = 1$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்கு இணையாக $V_2 = 0.4$ என்ற புள்ளி வழியே ஒரு கோடு வரைய வேண்டும். இக் கோடு V_1 - அச்சை வெட்டும் இடத்தில் 0.4 என அளவீடு செய்யவேண்டும். பின்னர் V_1 அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும்.

17. $f_1(u) + f_2(v) = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

இச் சமன்பாட்டுக்கு, இரண்டு இணையான குறியிணைப்புக் கோடுகளைப் பயன்படுத்தும் வகையில் நேமவரையத்தை அமைக்க லாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1(u)$$
$$y = m_2 f_2(v)$$
$$z = m_3 f_3(w)$$
$$s = m_4 f_4(t)$$



படம் 94

எனக் கொள்க. u, v-அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும். w-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியானது u-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியுடன் ஒன்றி யிருக்குமாறு w-அளவுகோலையும் u-அச்சின்மீது u-அளவுகோல் செல்லும் திசையில் அமைக்கவேண்டும். u, w-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளி A ஆகும். v- அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளி B ஆகும் (படம் 94). A-ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, AB-யின்மீது A-யிலிருந்து B-ஐ நோக்கிச் செல்லும் திசையில் t-அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். u, v-மதிப்புகளை இணைக்கும் CD என்ற குறியிணைப்புக் கோடும் w, t-மதிப்புகளை இணைக்கும் EF என்ற குறியிணைப்புக் கோடும் இணையாக இருக்கவேண்டு மெனில், அளவுகோல் குணகங்களிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன வெனக் காணலாம். G என்ற புள்ளி u-அச்சின்மீது

இருக்குமாறு DC-க்கு இணையாக BG என்ற நேர்கோட்டை வரைக. படம் 94-இல் AGB, AEF என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AE}{AF}$$

ஆனால்,
$$AG = AC + CG$$
$$= AC + DB$$

எனவே,
$$\frac{AC + DB}{AB} = \frac{AE}{AF}$$

$AC = x$, $BD = y$, $AE = z$, $AF = s$ ஆதலால்

$$\frac{x+y}{k} = \frac{z}{s}$$

இங்கு k என்பது AB-யின் நீளமாகும். u, v - அளவுகோல்களை ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்றிக் கொண்டாலும் மேற்கண்ட தொடர்பு மாருது என்பதைக் காண்க. x, y, z, s இவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$\frac{m_1 f_1(u) + m_2 f_2(v)}{k} = \frac{m_3 f_3(w)}{m_4 f_4(t)}$$

இச் சமன்பாடு

$$f_1(u) + f_2(v) = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்,

$$\frac{m_1}{k} = \frac{m_2}{k} = \frac{m_3}{m_4}$$

$$\text{எனவே } m_1 = m_2$$

$$k = \frac{m_1 m_4}{m_3}$$

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும்பொழுது, m_1, m_3, m_4 என்பவற்றின் மதிப்புகளை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொண்டு இவற்றிலிருந்து k-யின் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்துக் கொள்ளவேண்டும். t-அளவுகோலின் நீளத்திற்கும் k-யின் மதிப்புக்கும் எந்தவிதத் தொடர்பும் இல்லை.

u, w, t-அளவுகோல்கள் ஆகிய மூன்றின் தொடக்கப் புள்ளிகளும் ஒன்றியிருக்கும் என்பதை நினைவிற் கொள்க.

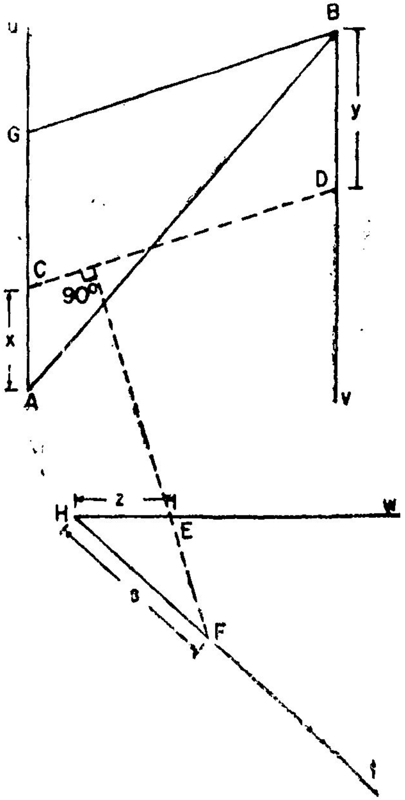
$$f_1(u) - f_2(v) = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்க

$$x = m_1 f_1(u)$$
$$y = m_2 f_2(v)$$

என்னும் u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டையும் கீழிருந்து மேலாக இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது அமைக்கவேண்டும். மற்ற யாவற்றையும்

$$f_1(u) + f_2(v) = \frac{f_3(w)}{f_4\ (t)}$$



படம் 95

என்ற சமன்பாட்டுக்கு அமைத்த நேமவரையத்தில் செய்தது போல் செய்யவேண்டும்.

$$f_1(u) + f_2(v) = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு u, w-அளவுகோல்களை ஒரே அச்சின் மீது அமைக்காமல் வெவ்வேறு அச்சுகளின் மீது அமைத்தும், படம் 95-இல் காட்டியபடி நேமவரையம் அமைக்கலாம்.

இப்படத்தில் u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக் கப்பட்டுள்ளன. u, w-அளவுகோல்கள் செங்குத்தாக உள்ளன. u, v, w-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகள் முறையே A, B, H ஆகும். AB-க்குச் செங்குத்தாக H வழியே செல்லும் நேர் கோட்டின் மீது t-அளவுகோல் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. t-அளவு கோலின் தொடக்கப்புள்ளியும் H ஆகும். w, t-அளவுகோல்கள் செல்லும் திசைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணமும், u-அளவு கோல் செல்லும் திசை, AB இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட கோண மும் சமமாயிருப்பதைப் படத்தில் காணலாம். இந்த அமைப்பில் பயன்படுத்தப்படும் குறியிணைப்புக் கோடுகள் செங்குத்தாக இருக்கும். u, v-மதிப்புகளுக்கு ஒரு குறியிணைப்புக் கோடும், w, t-மதிப்புகளுக்கு ஒரு குறியிணைப்புக் கோடும் வரையவேண்டும். CD, EF என்பன இவ்வாறு வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு கள் ஆகும். G என்ற புள்ளி u-அச்சில் இருக்குமாறு DC-க்கு இணையாக BG என்ற கோடு வரையப்பட்டுள்ளது. படத்தில் AGB, HEF என்பன வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆதலால்,

$$\frac{x+y}{k} = \frac{z}{s}$$

ஆகும். இங்கு k என்பது AB-யின் நீளமாகும். எனவே முந்திய அமைப்பில் பயன்படுத்தியதுபோல் $m_1 = m_2$, $k = \frac{m_1 m_4}{m_3}$ என்ற தொடர்புகளின் உதவியால் நேமவரையத்தை அமைக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 33

$M = \frac{W(l-a)}{8}$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. இதில்

M = உத்தரத்தின் பெருமத்திருப்புத் திறன் (Maximum moment), கி.கி-செ.மீ.

W = உத்தரத்தின் மீதுள்ள சுமை, $(0 - 3 \times 10^5)$கி.கி.

l = உத்தரத்தின் நீளம், $(0 - 400)$ செ.மீ.

a = சுமையைத் தாங்கி நிற்கும் பகுதியின் நீளம், $(0 - 200)$ செ.மீ.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$l - a = \frac{8M}{W}$$

என எழுதிக் கொள்க. இது

$$f_1(u) - f_2(v) = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 l$$
$$y = m_1 a$$
$$z = m_3(8M)$$
$$s = m_4 W$$

எனக் கொள்க. l, a- அளவுகோல்கள் இரண்டுக்கும் ஒரே அளவு கோல் குணகம் இருப்பதால், இரண்டு மாறிகளில் எதன் சார்புக்கு எல்லை வேறுபாடு மிகுதியாக உள்ளதோ, அந்த மாறியின் சமன்பாட்டிலிருந்து அளவுகோல் குணகத்தைக் கணக்கிட்டுக் கொள்வது நல்லது. எனவே, l-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1(400 - 0) = 400 m_1$$

$m_1 = 0.02$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே l-அளவுகோலின் நீளம் 8 செ.மீ. ஆகும். M-இன் கீழ் எல்லை, மேல் எல்லை இவற்றைக் கண்டுபிடித்துக் கொண்டால் m_3-இன் மதிப்பைத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்ள வசதியாக இருக்கும்.

M-இன் சிறுமம் $= \frac{1}{8}$ [W-வின் சிறுமம்] [$(l - a)$-யின் சிறுமம்]

$$= \frac{1}{8}(0)(0 - 200)$$
$$= 0$$

M-இன் பெருமம் $= \frac{1}{8}$ [W-வின் பெருமம்] [($l - a$)-யின் பெருமம்]

$$= \frac{1}{8}\,(3)\,(10)^5\,(400-0)$$

$$= 15\,(10)^6$$

($l - a$)-யின் சிறுமத்தைக் கணக்கிட, l-இன் சிறுமத்தையும், a-யின் பெருமத்தையும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இதேபோல ($l - a$)-யின் பெருமத்தைக் கணக்கிட, l-இன் பெருமத்தையும், a-யின் சிறுமத்தையும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இப்பொழுது M-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = 8m_3\,[15(10)^6 - 0]$$

$$= 12\,(10)^7\,m_3$$

$m_3 = \dfrac{5}{8(10)^7}$ எனக் கொள்க. எனவே M–அளவுகோலின் நீளம் 7·5 செ.மீ. ஆகும். அளவுகோல் நீளங்கள் எவையும் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லை. W-வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_4\,[3(10)^5 - 0]$$

$$= 3(10)^5\,m_4$$

$m_4 = \dfrac{3}{10^5}$ எனக்கொள்க. l, a-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் $= \dfrac{m_1 m_4}{m_3}$

$$= (0.02)\left[\frac{3}{10^5}\right]\left[\frac{8(10)^7}{5}\right]$$

$$= 9{\cdot}6 \text{ செ. மீ.}$$

இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

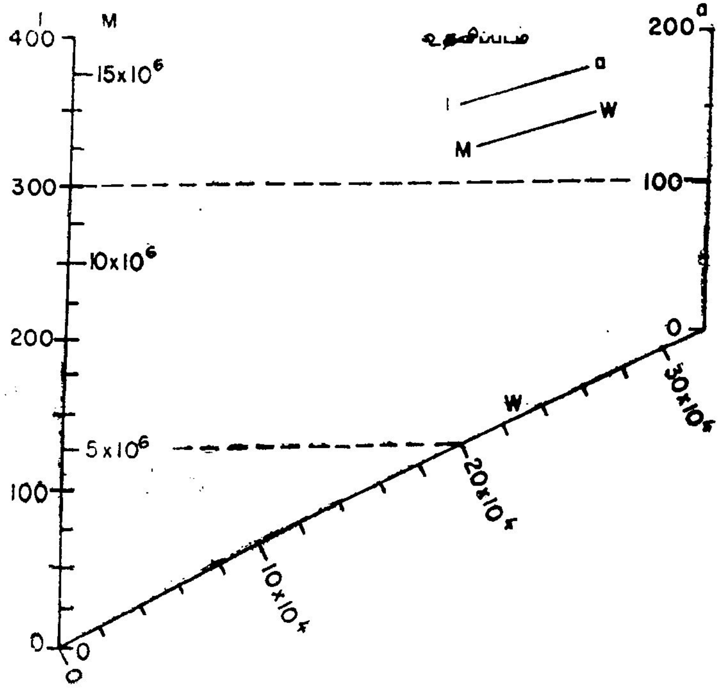
$$x = 0{\cdot}02\,l$$

$$y = 0{\cdot}02\,a$$

$$z = 5\,(10)^{-7}\,M$$

$$s = 3\,(10)^{-5}\,W$$

ஆகும். l, M-அளவுகோல்களை ஒரு நேர்கோட்டின்மீது பக்கத்திற்கு ஒன்றாக ஒரே திசையில் செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும் (படம் 96). இவ்விரு அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளும் ஒன்றியிருக்க வேண்டும். l, M-அளவுகோல்களுக்கு இணையான ஒரு கோட்டின்மீது a-அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். l, M-அளவுகோல்கள் செல்லும் திசையிலேயே a-அளவுகோலும் செல்லவேண்டும். பின்னர் l, M-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியையும் a-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் மீது W-அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும். W-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளி, l, M-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியுடன் ஒன்றியிருக்க வேண்டும். W-அளவுகோலானது, a-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியை நோக்கிச் செல்லுமாறு அமைக்கப்பட்டுள்ளது. W-அளவுகோலின் நீளமும், l, a-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரமும் சமமாயிருக்கத் தேவையில்லை. அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் $l = 300$, $a = 100$,



படம் 96

$W = 20(10)^4$ எனில் M-இன் மதிப்பைக் காணக் குறியிணைப்புக் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. $M = 5(10)^5$ எனத் தெரிகிறது.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு இணைக்குறியிணைப்புக் கோடுகளையோ அல்லது செங்குத்துக் குறியிணைப்புக் கோடுகளையோ கொண்ட நேமவரையம் அமை (1⋯12).

1. $$\frac{R_1}{R_2} = \frac{k+t_1}{k+t_2}$$

$k = 234{\cdot}5$

t_1 = தொடக்க வெப்பநிலை, $(0 - 150)°C$.

t_2 = இறுதி வெப்பநிலை, $(0 - 150)°C$.

R_1 = தொடக்க மின்தடை, $(0 - 20)$ ஓம்.

R_2 = இறுதி மின்தடை, $(0 - 20)$ ஓம்.

2. $d^3H = 2\pi Ir^2$

H = புலவலிமை (field intensity), $(0 - 50)$ கோடுகள்/செ.மீ.².

I = கம்பியில் உள்ள மின்னோட்டம், $(0 - 500)$ ஆம்பியர்.

r = ஆரம், $(1 - 10)$ செ.மீ.

d = தூரம், $(1 - 20)$ செ.மீ.

3. $$\frac{u+2}{v-1} = \frac{w^2}{\sin\theta}$$

$u\ (0 - 5)$; $v\ (4 - 8)$; $w\ (1 - 5)$; $\theta\ (0° - 90°)$.

4. $u^2+v^2 = w^2 + t^2$

$u\ (0 - 10)$; $v\ (0 - 10)$; $w\ (0 - 10)$; $t\ (0 - 10)$.

5. $$\frac{y_1}{y_2} = \left[\frac{x_1}{x_2}\right]^{0.6}$$

x_1 = செயல் ஆற்றல், $(1 - 40)$ அலகுகள்.

x_2 = செயல் ஆற்றல், (1 - 40) அலகுகள்.

y_1 = விலை, (100 - 10,000) ரூபாய்.

y_2 = விலை, (100 - 10,000) ரூபாய்.

x, *y* இவற்றில் 1 என்ற கீழ்க்குறி தெரிந்த பொறியியல் சாதனத்திற்கும் (equipment), 2 என்ற கீழ்க்குறி தெரியாத பொறியியல் சாதனத்திற்கும் உரியன.

6. $I = \frac{E}{r+R}$

I = மின்னோட்டம், (0 - 120) ஆம்பியர்.

E = மின்னியக்கு விசை, (0 - 6) வோல்ட்டு.

r = உள்மின்தடை (internal resistance), (0.05 - 0·1) ஓம்.

R = புற மின்தடை (external resistance), (0 - 12) ஓம்.

8. $A = \frac{h\,(a+b)}{2}$

A = சரிவகத்தின் (trapezium) பரப்பு, செ.மீ.^{2}

h = இணைப் பக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரம், (0 - 100) செ.மீ.

a = ஓர் இணைப்பக்கம், (0 - 500) செ.மீ.:

b = மற்றோர் இணைப்பக்கம், (0 - 200) செ.மீ.

8. $V = \frac{\pi h}{9}(\tfrac{5}{4} D^2 + d^2)$

h (0 - 10); D (0 - 30) ; d (0 - 20) ; v (0 - 5000)

9. $u - 2v = \frac{w^2}{t-5}$

u (0 - 10) ; v (1 - 4) ; w (0 - 3) ; t (6 - 12)

10. $V = \pi(R^2 - r^2)\, h$

V = உள்ளீடற்ற குழாயின் கன அளவு, செ.மீ.^{3}

R = வெளி ஆரம், (2 - 6) செ.மீ.

r = உள் ஆரம், (1 - 5) செ.மீ.

h = நீளம், (0 - 100) செ. மீ.

11. $u + v = wt$

$u\,(0 - 20)$; $v\,(0 - 40)$; $w\,(0 - 10)$; $t\,(2 - 6)$.

12. $E = \dfrac{k}{t^a}$

F = உலோகத்தின் (metal) நீட்சி வலிமை (tensile strength), (10 - 50) கி.கி./மி.மீ.^{2}

t = தடிப்பு, (10 - 90) மி.மீ.

k = பருப்பொருளைச் (material) சார்ந்த மாறிலி, (10 - 50) கி.கி/மி.மீ.^{2}

a = பருப்பொருளைச் சார்ந்த மற்றொரு மாறிலி, (0.2 - 0.7).

6. ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அளவுகோல்கள்

(Concurrent Scales)

18. $\dfrac{1}{f_1(u)} + \dfrac{1}{f_2(v)} = \dfrac{1}{f_3(w)}$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

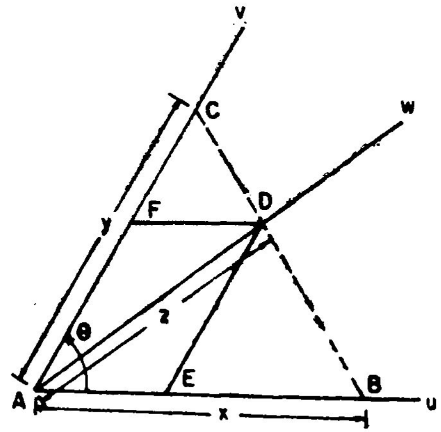
இவ் வகைச் சமன்பாடு, மின்னியல் (electricity), ஒளியியல் (optics), வெப்பமாற்றம் (heat transfer) பற்றிய கணக்குகளில் அடிக்கடி வரும். இச்சமன்பாட்டுக்கு மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையம் அமைக்கலாம். இருப்பினும் அதைவிட மிக எளிமையாக, ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையத்தை இச் சமன்பாட்டுக்கு அமைக்கலாம். மூன்று அளவுகோல்களும் சந்திக்கும் புள்ளியே இந்த மூன்று அளவுகோல்களுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாகும்.

ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையத்திற்கு ஆரை நேமவரையம் (radial nomogram) என்றும், விசிறி விளக்கப் படம் (Fan chart) என்றும், F - விளக்கப் படம் (F - chart) என்றும் வேறு பெயர்கள் உண்டு. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு ஆரை நேமவரையம் அமைக்கும் முறையை இப்பொழுது காணலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 \, f_1(u)$$
$$y = m_2 \, f_2(v)$$
$$z = m_3 \, f_3(w)$$

எனக் கொள்க. இம் மூன்று அளவுகோல்களையும் படம் 97 - இல் காட்டியுள்ளபடி A வழியாகச் செல்லும் மூன்று நேர்கோடுகளில்

மீது அமைக்கவேண்டும். u, v - அளவுகோல்கள் வெளிக்கோடு களின் மீது இருக்கவேண்டும். மூன்று அளவுகோல்களுக்கும் A என்ற புள்ளியே தொடக்கப் புள்ளியாக இருக்கவேண்டும். சமன்



படம் 97

பாட்டை நிறைவுசெய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w-மதிப்புகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவேண்டுமெனில், அளவுகோல் குணகங்களிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

u, v-மதிப்புகளை இணைக்கும் BC என்ற குறியிணைப்புக்கோடு w-அச்சை D என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். எனவே, $AB = x$, $AC = y$, $AD = z$. E, F என்ற புள்ளிகள் முறையே u, v-அச்சு களின் மீது இருக்குமாறு AC-க்கு இணையாக DE-ஐயும் AB-க்கு இணையாக DF-ஐயும் வரைக. $AE = x'$ என்க. $AF = y'$ என்க. EBD, ABC என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{EB}{AB} = \frac{ED}{AC}$$

அதாவது $$\frac{x - x'}{x} = \frac{y'}{y}$$

அதாவது $$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} = 1$$

x, y இவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட,

$$\frac{x'}{m_1 f_1(u)} + \frac{y'}{m_2 f_2(v)} = 1$$

இச் சமன்பாடு

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்க வேண்டுமெனில்

$$\frac{x'}{m_1} = \frac{y'}{m_2} = f_3(w)$$

$$\text{எனவே } x' = m_1 f_3 (w)$$

$$y' = m_2 f_3 (w)$$

$$\text{மேலும் } \frac{x'}{y'} = \frac{m_1}{m_2}$$

மேற்சொன்ன தொடர்புகள் w-அளவுகோலை அமைக்கப் பயன் படுகின்றன. எனவே

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கவேண்டுமெனில் முதலில்

$$x = m_1 f_1(u)$$

$$y = m_2 f_2(v)$$

என்ற அளவுகோல்களை இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோடு களின் மீது அமைக்கவேண்டும். இரண்டு நேர்கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே, u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாக இருக்கவேண்டும். பின்னர் w - அச்சின் இருப்பிடத்தைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டும். இதற்கு u, v-அச்சு களின் மீது முறையே E, F என்ற புள்ளிகளை $AE : AF = m_1 : m_2$ என்றிருக்குமாறு குறித்துக்கொண்டு $AEDF$ என்ற இணைவகத்தை (parallelogram) அமைக்கவேண்டும். AD என்ற மூலைவிட்டக் கோடே w-அச்சாகும். w- அளவுகோலை அமைக்க m_3 - இன் மதிப்பைக் காணவேண்டும். m_3- இன் மதிப்பைக் காணுமலும் w-அளவுகோலை அமைக்கலாம். இதற்கு

$$x' = m_1 f_3(w)$$

என்னும் w-வின் துணையளவுகோலை u-அச்சின் மீது A-ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, u-அளவுகோல் செல்லும்

திசையில் அமைக்கவேண்டும். துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகள் வழியே, v-அச்சுக்கு இணையாக நேர்கோடுகள் வரைந்தால் இக்கோடுகள் w-அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும்.

$$y' = m_2 f_3(w)$$

என்னும் w-வின் துணையளவுகோலை v-அச்சின் மீது A-ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, v-அளவுகோல் செல்லும் திசையில் அமைத்தும் w-அளவுகோலை அமைக்கலாம். இப்பொழுது துணையளவுகோலின் அளவுக்குறியீடுகள் வழியே u-அச்சுக்கு இணையாக நேர்கோடுகளை வரைந்தால் இக் கோடுகள் w-அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும்.

துணையளவுகோலும், துணையளவுகோலின் அளவுக்குறியீடுகள் வழியே v அல்லது u-அச்சுக்கு இணையாக வரையப்பட்ட கோடுகளும் நேமவரையத்தில் இருக்கத் தேவையில்லை ஆதலால், அவற்றை w-அளவுகோலை அமைத்து முடித்ததும் துடைத்தழித்து விடலாம்.

w-அளவுகோலை, m_3-இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டும் அமைக்கலாம். படம் 97-இல், $\triangle AED$-யிலிருந்து

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 - 2AE.\ ED \cos \underline{|AED}$$

அதாவது $z^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos(180° - \theta)$.

இச்சமன்பாட்டில்

$$x' = m_1 f_3(w),\ y' = m_2 f_3(w),\ z = m_3 f_3(w)$$

என்று பதிலிட்டுச் சுருக்கினல்

$$m_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta$$

எனவே $m_3 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta}$

ஆகவே u, v-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள கோணமான θ-வை வசதிக்கேற்ப எடுத்துக்கொண்டு m_3-இன் மதிப்பைக் கணக்கிடவேண்டும். பின்னர் w-அச்சின் மீது

$$z = m_3 f_3(w)$$

என்ற அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும். w-அளவுகோலின்

தொடக்கப் புள்ளி, u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளியுடன் ஒன்றியிருக்கும் என்பதை நினைவிற் கொள்க.

குறிப்பு:-

$x' = m_1 f_3(w)$, $y' = m_2 f_3(w)$, $z = m_3 f_3(w)$ என்பதால் $x' : y' : z = m_1 : m_2 : m_3$. எனவே, w-அச்சை அமைக்க வரையும் இணைவகத்தில் AE, AF என்ற பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே m_1, m_2 என்பவற்றிற்கு விகிதசமமாக இருக்குமென்றும், A வழியாகச் செல்லும் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் m_3-க்கு விகிதசமமாக இருக்குமென்றும் தெரிகிறது.

$$\frac{1}{f_1(u)} - \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்க, இச் சமன்பாட்டை

$$\frac{1}{f_2(v)} + \frac{1}{f_3(w)} = \frac{1}{f_1(u)}$$

என மாற்றி எழுதிக்கொண்டு, மேற்கூறிய முறையைப் பின்பற்றலாம். அல்லது

$$y = m_2 f_2(v)$$

என்ற v-அளவுகோலை மட்டும் படம் 97-இல் அமைத்ததற்கு எதிர்த்திசையில் அமைத்து, w-அளவுகோலை அமைப்பதிலோ வேறு எதிலுமோ எவ்வித மாற்றமும் செய்யாமல் இருக்க வேண்டும்.

$$\frac{1}{f_1(u)} - \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில் u-அளவு கோலானது, v, w-அளவுகோல்களுக்கிடையில் இருப்பதைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 34

$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. இதில்

R_1 = முதற்கம்பியில் உள்ள மின்தடை, (0 - 400) ஓம்.

R_2 = இரண்டாம் கம்பியில் உள்ள மின்தடை, (0 - 300) ஓம்.

R = நிகர் (equivalent) மின்தடை, ஓம்.

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

R_1-க்கு $x = m_1 R_1$

R_2-க்கு $y = m_2 R_2$

எனக் கொள்க. R_1-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (400 - 0)$$
$$= 400 m_1$$

$m_1 = 0.02$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

R_2-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

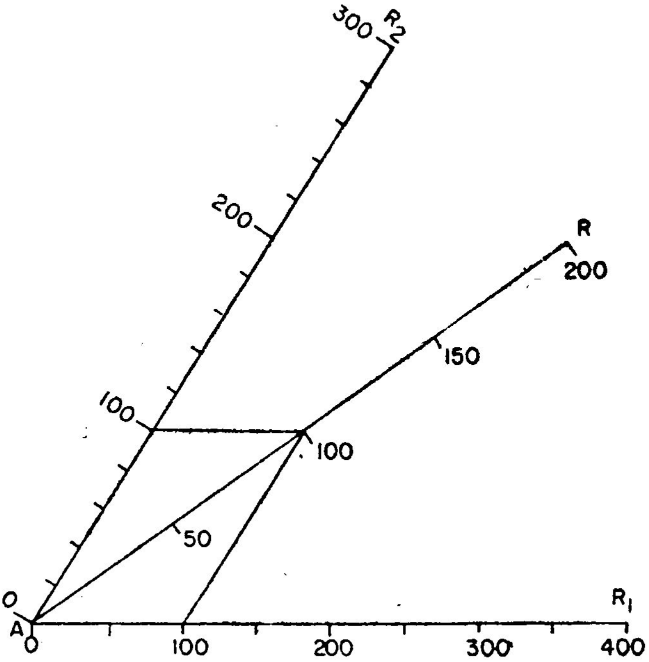
$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 (300 - 0)$$
$$= 300\, m_2$$

$m_2 = 0.03$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. R_1, R_2-அளவுகோல்களின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கத் தேவையில்லை. இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 0.02\, R_1$$
$$y = 0.03\, R_2$$

ஆகும். A-ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, R_1, R_2-அளவுகோல்களை A வழியாகச் செல்லும் இரண்டு நேர்கோடுகளின் மீது அமைக்கவேண்டும் (படம் 98). பின்னர், R-அச்சை வரையவேண்டும். இதற்கு A-யிலிருந்து R_1, R_2-அச்சுகளின் மீது $m_1 : m_2$ அதாவது $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் நீளங்களை அளந்து, இந் நீளங்களை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் (adjacent sides) கொண்ட இணைவகத்தை அமைக்கவேண்டும். A வழியாகச் செல்லும், இணைவகத்தின் மூலை விட்டக்கோடே R-அச்சாகும்.

$$x' = m_1 R$$
$$\text{அதாவது} \quad x' = 0.02\, R$$



படம் 98

என்ற R-இன் துணையளவுகோலை, R_1-அச்சின் மீது A-ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, R_1-அளவுகோல் செல்லும் திசையில் அமைத்து, துணையளவுகோலின் அளவுக்குறியீடுகள் வழியே R_2-அச்சுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரைந்தால் இக் கோடுகள் R-அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும். இவ்வாறு R-அளவுகோலை அமைத்ததும் அதை அமைக்கப் பயன்படுத்திய துணையளவுகோலையும், துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகள் வழியாக வரைந்த இணைகோடுகளையும் துடைத்தழித்து விடலாம். R_1, R_2 இவற்றின், மேல் எல்லைகளுக்குரிய அளவுக் குறியீடுகளை இணைக்கும் நேர்கோடு R-அச்சை வெட்டும் புள்ளி முடிய R-அளவுகோலில் அளவீடு செய்தால் போதும்.

எடுத்துக்காட்டு 35

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{2}{c}$$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. $a\ (2 - 5)$; $b\ (1 - 4)$; $c\ (10 - 50)$.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)}$$

என எழுதிக் கொள்க. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$a\text{-க்கு} \quad x = m_1 a^2$$

$$b\text{-க்கு} \quad y = m_2 b^2$$

எனக் கொள்க. a-அளவுகோலின் கீழ் எல்லை 2 என்றாலும் இந்த அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியைக் குறிக்க வேண்டியிருப்ப தால் a-யின் நெடுக்கத்தை (0 - 5) எனக் கொள்க. இதே காரணத்திற்காக b-யின் நெடுக்கத்தை (0 - 4) எனக் கொள்க. a-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (5^2 - 0)$$

$$= 25\, m_1$$

$m_1 = 0.2$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க.

b யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 (4^2 - 0)$$

$$= 16\, m_2$$

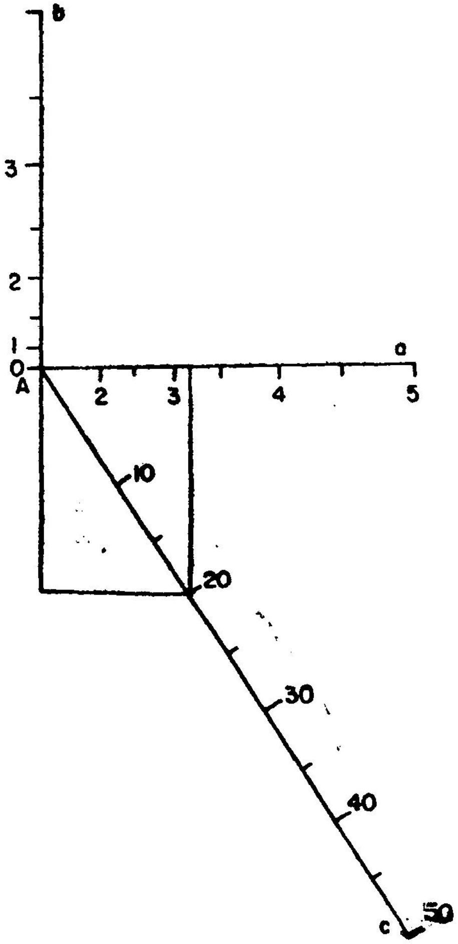
$m_2 = 0.3$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே, குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = 0.2\, a^2$$

$$y = 0.3\, b^2$$

ஆகும். a, b-அளவுகோல்களை இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோடுகளின் மீது அமைக்கவேண்டும் (படம் 99). வசதிக்காக இக் கோடுகளைச் செங்குத்துக் கோடுகளாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். a, b-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளி யானது, a, b-அளவுகோல்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியாக இருக்கவேண்டும். இப் புள்ளியை A என்க. c- அச்சை வரைய அமைக்கப்படும் இணைவகத்தின் பக்கங்களை a, b-அச்சுகளின் மீது A-யிலிருந்து அளந்து கொள்ளவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\frac{1}{f_1(u)} - \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$



படம் 99

என்ற வகையைச் சேர்ந்ததால், இணைவகத்தை அமைக்க *a*-அச்சின் மீது அளந்து கொள்ளும் நீளத்தை *a*-அளவுகோல் செல்லும் திசையிலும், *b* - அச்சின் மீது அளந்துகொள்ளும் நீளத்தை *b*- அளவுகோல் செல்லும் திசைக்கு எதிர்த்திசையிலும் அளந்து கொள்ளவேண்டும். *a*, *b*-அச்சுகளின் மீது அளக்கப்பட்ட நீளங்கள் 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் இருக்கவேண்டும். *A* வழியாகச் செல்லும், இணைவகத்தின் மூலைவிட்டக்கோடே *c*-அச்சாகும். பின்னர் *c*-அளவுகோலை அமைக்க

$$x' = m_1\left(\frac{c}{2}\right)$$

அதாவது $x' = 0.1c$

என்ற c-யின் துணையளவுகோலை a-அச்சின் மீது A-ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, a-அளவுகோல் செல்லும் திசையில் அமைக்க வேண்டும். துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகள் வழியே b-அச்சுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரைந்தால் இக் கோடுகள் c-அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும். c-அளவுகோலை அமைக்க, c-யின் துணையளவுகோலை b-அச்சின் மீது அமைத்தால் துணையளவுகோலை b-அளவுகோல் செல்லும் திசைக்கு எதிர்த் திசையில் அமைக்கவேண்டும் என்பதை நினைவிற் கொள்ள வேண்டும்.

19. $\dfrac{1}{f_1(u)} + \dfrac{1}{f_2(v)} + \dfrac{1}{f_3(w)} + \dots\dots = \dfrac{1}{f_n(t)}$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

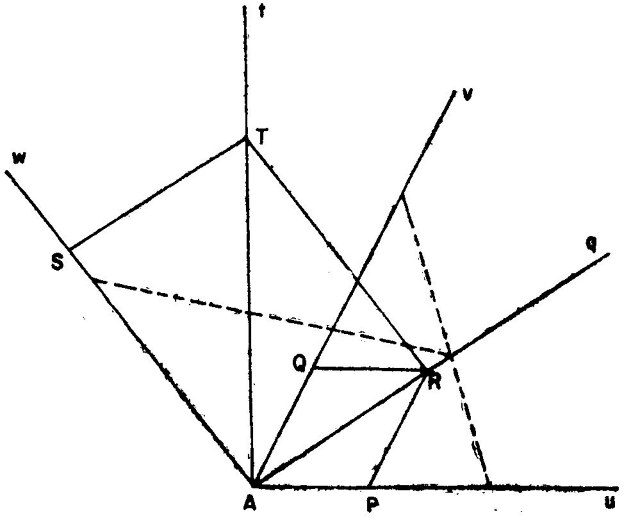
$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} + \frac{1}{f_3(w)} = \frac{1}{f_4(t)}$$

என்ற நான்குமாறிச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும் முறையை முதலில் அறிந்துகொள்ளலாம். இச்சமன்பாட்டை

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{f_3(w)} = \frac{1}{f_4(t)}$$

என்னும் இரண்டு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொள்ளவேண்டும். இதில் q என்பது ஓர் இடைநிலைமாறி ஆகும். u, v, q என்ற மூன்று மாறிகளைக்கொண்ட சமன்பாட்டுக்கு, ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேம வரையத்தை முதலில் அமைக்கவேண்டும். மூன்று அளவு கோல்களும் சந்திக்கும் புள்ளியே மூன்று அளவுகோல்களுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாகும். இப்புள்ளியை A என்க (படம் 100).



படம் 100

பின்னர் q, w, t என்ற மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்கு, A வழியாகச் செல்லும் மூன்று அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையத்தை அமைக்கவேண்டும். இம்மூன்று அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியும் A என்ற புள்ளியேயாகும். மேலும் u, v, q என்ற மாறிகளைக்கொண்ட சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில் அமைத்த q-அளவுகோலையே, q, w, t என்ற மாறிகளைக்கொண்ட சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்திலும் பயன்படுத்தவேண்டும். q என்னும் மாறி ஓர் இடைநிலைமாறி ஆதலால், q-அளவுகோலின் மீது அளவுக்குறியீடுகள் செய்யத் தேவையில்லை. அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 f_1(u)$$
$$y = m_2 f_2(v)$$
$$z = m_3 q$$
$$r = m_4 f_3(w)$$
$$s = m_5 f_4(t)$$

எனக் கொள்க. m_1, m_2 இவற்றின் மதிப்புகளை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொண்டு u, v-அளவுகோல்களை அமைக்க வேண்டும். பின்னர் u, v - அச்சுகளின் மீது முறையே m_1, m_2 என்பவற்றிற்கு விகிதசமமான நீளங்களை A-யிலிருந்து

அளந்து, இவற்றை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைவகத்தை அமைக்கவேண்டும். இணைவகத்தில் A வழியாகச் செல்லும் மூலைவிட்டக்கோடே q-அச்சாகும். பின்னர் m_4-இன் மதிப்பை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொணடு w-அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். பின்னர் q, w-அச்சுகளின் மீது முறையே m_3, m_4 என்பவற்றிற்கு விகிதசமமான நீளங்களை A-யிலிருந்து அளந்து, இவற்றை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைவகத்தை அமைக்கவேண்டும். இந்த இணைவகத்தில் A வழியாகச் செல்லும் மூலைவிட்டக் கோடே t-அச்சாகும். t-அச்சை அமைப்பதற்கு m_3-இன் மதிப்பு தேவைப் படுகிறது. எனவே q-அளவுகோலின் மீது அளவுக் குறியீடுகள் செய்யத் தேவையில்லை எனினும், அதன் அளவுகோல் குணகத்தைக் கணக்கிடவேண்டியுள்ளது. q-அச்சை வரைவதற்கு அமைத்த இணைவகத்தின் பக்கங்கள் m_1, m_2 என்பவற்றிற்கும், A வழியாகச் செல்லும் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் m_3–க்கும் விகித சமமாக இருக்கும் என முன்பே விளக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே q-அச்சை வரைவதற்கு அமைத்த இணைவகத்தில் A வழியாகச் செல்லும் மூலைவிட்டத்தின் நீளத்தை அளந்து, அதிலிருந்து m_3-இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம். அல்லது

$$m_3 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \cos\theta}$$

என்ற தொடர்பிலிருந்து, m_3-இன் மதிப்பைக் காணலாம். இங்கு. θ என்பது u, v-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் ஆகும்

m_3-இன் மதிப்பைக் கணக்கிடாமலும், t-அச்சின் இருப்பிடத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு கண்டுபிடிக்கலாம். u, v-அச்சுகளின் மீது முறையே P, Q என்ற புள்ளிகளை $AP : AQ = m_1 : m_2$ என்று இருக்குமாறு எடுத்துக்கொண்டு, $APRQ$ என்ற இணைவகத்தை அமைத்தால் AR என்ற மூலைவிட்டக்கோடே q அச்சாகும். மேலும், $AP : AQ : AR = m_1 : m_2 . m_3$. t-அச்சை வரைவதற்கு w-அச்சின் மீது S என்ற புள்ளியை $AR : AS = m_3 : m_4$ என்று இருக்குமாறு எடுத்துக்கொண்டு $ARTS$ என்ற இணைவகத்தை அமைக்கலாம். AT என்ற மூலைவிட்டக்கோடே t-அச்சாகும்.

$$AP : AQ : AR = m_1 : m_2 : m_3$$

$$AR : AS = m_3 : m_4$$

என்ற விகிதச் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$AP : AQ : AS = m_1 : m_2 : m_4$$

எனத் தெரிகிறது. எனவே, u, v, w-அச்சுகளின் மீது முறையே P, Q, S என்ற புள்ளிகளை $AP : AQ : AS = m_1 : m_2 : m_4$ என்றிருக்குமாறு எடுத்துக்கொண்டு படம் 100-இல் காட்டிய வாறு இணைவகங்களை அமைத்தால் t-அளவுகோலுக்குரிய கோடு கிடைத்துவிடும். t-அளவுகோலை அமைப்பதற்கு q-அச்சின் மீதோ, w-அச்சின் மீதோ t-யின் துணையளவுகோலை முதலில் அமைக்கவேண்டும். q-அச்சின் மீது துணையளவுகோல் அமைக்கப்படுமாயின், m_3-இன் மதிப்பு வேண்டியிருக்கும். t-அச்சை வரைவதற்கே m_3-இன் மதிப்பைக் கணக்கிடாமல் வேறு முறை பின்பற்றப்படுகிறது. எனவே, t-அளவுகோலை அமைக்க, w-அச்சின் மீது A-ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு w-அளவுகோல் செல்லும் திசையில்

$$z' = m_4 f_4(t)$$

என்ற t-யின் துணையளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். பின்னர் துணையளவுகோலின் அளவுக்குறியீடுகள் வழியே, q-அச்சுக்கு இணையாக நேர்கோடுகள் வரைந்தால், இக் கோடுகள் t-அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும். t-அளவுகோலை அமைத்து முடித்ததும், t-யின் துணையளவுகோலையும் q-அச்சுக்கு இணையாக வரைந்த கோடுகளையும் துடைத்தழித்துவிடலாம்.

u, v, w,-மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டு, t-யின் மதிப்பைக் கேட்டால், u, v-மதிப்புகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக்கோட்டை முதலில் வரையவேண்டும். பின்னர் இக்குறியிணைப்புக் கோடானது q-அச்சை வெட்டும் புள்ளியையும், w-வின் மதிப்புக்கான புள்ளியையும் இணைக்கும் இரண்டாவது குறியிணைப்புக் கோட்டை வரையவேண்டும். இரண்டாவது குறியிணைப்புக் கோடு t-அளவுகோலைத் தேவையான மதிப்பில் வெட்டும். இந் நேமவரையத்தில் q-அளவுகோல் ஓர் இயக்குமைய அளவு கோலாகப் பயன்படுகிறது.

நான்கு மாறிச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைத்த முறையை விரிவுபடுத்தி

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} + \frac{1}{f_3(w)} + \dots\dots = \frac{1}{f_n(t)}$$

என்ற n-மாறிச் சமன்பாட்டுக்கு, ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அளவுகோல்களைக்கொண்ட நேமவரையத்தை அமைக்கலாம்.

இதற்கு $(n - 3)$ இடைநிலை மாறிகளைப் பயன்படுத்தி, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை $(n - 2)$ மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொள்ள வேண்டும். அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் n அளவுக்குறியீடு செய்த அளவுகோல்களும், $(n - 3)$ அளவுக்குறியீடு செய்யப்படாத அளவுகோல்களும் இருக்கும். அளவுக்குறியீடு செய்யப்படாத அளவுகோல்கள் யாவும் இயக்கு மையக் கோடுகளாகப் பயன்படுகின்றன. இந்த நேமவரையத்தைப் பயன்படுத்தி ஒரு மாறியின் மதிப்பைக் காண $(n - 2)$ குறியிணைப்புக் கோடுகள் தேவைப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 36

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை.

R_1 = முதற் கம்பியில் உள்ள மின்தடை, (0 - 70) ஓம்.

R_2 = இரண்டாம் கம்பியில் உள்ள மின்தடை, (0-150) ஓம்.

R_3 = மூன்றும் கம்பியில் உள்ள மின்தடை, (0 - 120) ஓம்.

R = நிகர் மின்தடை, ஓம்.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R}$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொள்க. அளவு கோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 R_1$$

$$y = m_2 R_2$$

$$z = m_3 R_3$$

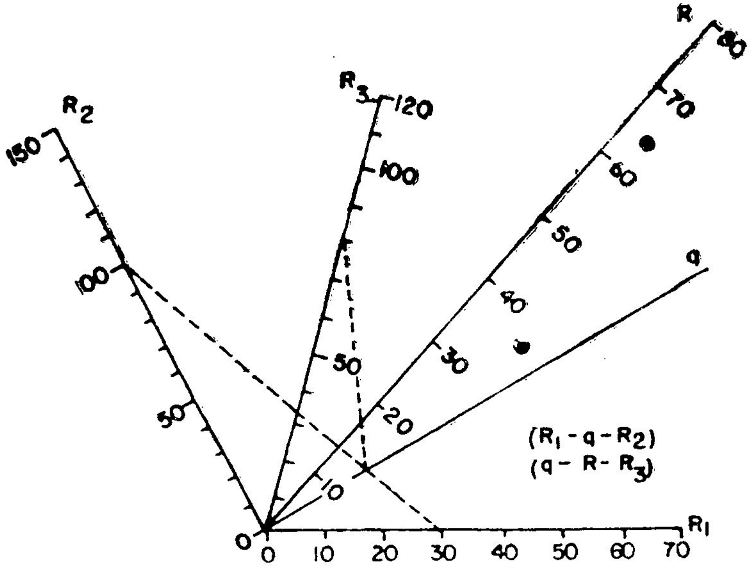
எனக் கொள்க. $m_1 = 0.8$, $m_2 = 0.4$, $m_3 = 0.5$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். எனவே $m_1 : m_2 : m_3 = 8 : 4 : 5$. R_1, R_2, R_3 - அளவுகோல்களை ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று நேர்கோடுகளின் மீது அமைக்க வேண்டும் (படம் 101). மூன்று

அளவுகோல்களும் சந்திக்கும் புள்ளியே மூன்று அளவுகோல் களுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாக இருக்க வேண்டும். பின்னர் R_1, R_2, R_3 – அச்சுகளின் மீது முறையே 4 செ.மீ, 2 செ.மீ, 2.5 செ.மீ. நீளங்களைத் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து அளந்து படம் 100 - இல் விளக்கிக் காட்டியபடி இணைவகங்களை அமைத்து q, R - அளவுகோல்களுக்குரிய கோடுகளை வரையவேண்டும்.

$$z' = m_3 R$$

$$\text{அதாவது } z' = 0.5\ R$$

என்ற R – இன் துணையளவுகோலை R_3 - அச்சின் மீது அமைத்து, இந்தத் துணையளவுகோலின் அளவுக்குறியீடுகள் வழியே q - அச்சுக்கு இணையாகக் கோடுகள் வரைந்தால் இக்கோடுகள்



படம் 101

R - அச்சை ஒத்த அளவுக்குறியீடுகளில் வெட்டும். R_1, R_2, R_3- அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியே R - இன் துணையளவு கோலுக்கும் R - அளவுகோலுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாக அமையும். R-அளவுகோலில் எதுமுடிய அளவீடு செய்யவேண்டும் என்பதைச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிட்டுக் கொள்ளலாம். அல்லது R_1, R_2, R_3 இவற்றின் மேல் எல்லைகளுக்குரிய R - இன் மதிப்புக்கான புள்ளியைக் குறியிணைப்புக் கோடுகளை வரைந்து

கண்டுபிடித்துக்கொண்டு, அப்புள்ளி முடிய R - அளவுகோலில் அளவீடுகள் செய்தால் போதுமானது. R - அளவுகோலை அமைத்து முடித்ததும் அதை அமைக்கப் பயன்படுத்திய துணையளவு கோலையும், துணையளவு கோலின் அளவுக்குறியீடுகள் வழியாக வரைந்த இணைகோடுகளையும் துடைத்தழித்துவிடலாம். $R_1 = 30$, $R_2 = 100$, $R_3 = 80$ எனில் R - இன் மதிப்பைக் காண, அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் குறியிணைப்புக் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. R - இன் மதிப்பு ஏறத்தாழ 18 எனத் தெரிகிறது.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையங்கள் அமை (1 - 10).

1. $$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

f = குவியத்தூரம் (focal length), செ.மீ.

u = பொருளின் தூரம், (0 - 300) செ.மீ.

v = பிம்பத்தின் (image) தூரம், (0 - 300) செ.மீ.

2. $$H = \frac{1}{\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1}}$$

H = வெப்ப மாற்றத்தின் ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட படலக் கெழு, (Combined film coefficient).

h_0 = நீர்ப்படலக் கெழு (Water film coefficient), (100 - 500).

h_1 = வாயுப்படலக் கெழு (Gas film coefficient), (300 - 1200).

3. $$\frac{1}{u} - \frac{3}{v^2} = \frac{1}{2w}$$

u (0 - 10) ; v (0 - 10).

4. $$\frac{1}{u-1} + \frac{2}{v+1} = \frac{1}{w}$$

u (1 - 8) ; v (0 - 5).

5. $$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\sin C}$$

$A\ (0^\circ - 90^\circ)\ ;\ B\ (0^\circ - 90^\circ)$.

6. $$s = \frac{2\ s_1 s_2}{s_1 + s_2}$$

s_1 = போகும் பொழுது வேகம், (0 - 300) கி.மீ./மணி.

s_2 = வரும்பொழுது வேகம், (0 - 500) கி.மீ./மணி.

s = சராசரி வேகம், கி.மீ./மணி.

7. $$E = \frac{9\ KG}{3K + G}$$

E = யங்கின் குணகம் (Young's modulus), (0.3 - 5).

K = இறுக்கக் குணகம் (compression modulus).

G = விறைப்புக் குணகம் (rigidity modulus), (0.2 - 0.8).

8. $$D = \frac{4\ wd}{w + 2d}$$

w = வாய்க்காலின் அகலம், (1 - 30) செ.மீ.

d = நீர்மத்தின் ஆழம், (1 - 20) செ.மீ.

D = நிகர் விட்டம், செ.மீ.

9. $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

$a\ (0 - 5)\ ;\ b\ (0 - 5)\ ;\ c\ (0 - 5)$.

10. $$\frac{1}{u} + \frac{2}{v} - \frac{3}{w} = \frac{4}{t}$$

$u\ (0 - 5)\ ;\ v\ (0 - 8)\ ;\ w\ (0 - 10)$.

7. மீண்டும் வரும் மாறிகள்
(Recurrent Variables)

இதுவரை அமைத்த நேமவரையங்களுக்குரிய சமன்பாடுகளில் ஒவ்வொரு மாறிக்கும் ஒவ்வொரு சார்பே வந்தது.

$$u + vw^2 = \log w$$

என்ற சமன்பாட்டில் w என்ற மாறிக்கு w^2, $\log w$ என்ற இரு சார்புகள் வந்துள்ளன. இவ்வாறு ஒரு சில மாறிகளுக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்புகள் வரக்கூடிய சமன்பாடுகளுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும் முறைகளை இப்பொழுது காணலாம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்புகளுடன் ஒரு சமன்பாட்டில் இடம்பெறும் மாறியை மீண்டும் வரும் மாறி (recurrent variable) என அழைக்கலாம்.

20. $f_1(u) + f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

பெரும்பாலான சமன்பாடுகள், குறிப்பாக அடர்த்தி எண், வெப்பநிலை, கரைபொருளின் (solute) நூற்றுவீதம் ஆகிய மூன்றின் தொடர்போ, பகுதி அழுத்தம், வெப்பநிலை, கரைதிறன் ஆகிய மூன்றின் தொடர்போ

$$f_1(u) + f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற சமன்பாட்டின் அமைப்பில் இருக்கும். w என்ற மாறிக்கு $f_3(w)$, $f_4(w)$ என்ற இரு சார்புகள் இருப்பதே இச் சமன்பாட்டில் உள்ள சிறப்பாகும். இதுவரை அமைத்த நேமவரையங்களைக் காட்டிலும் மீண்டும் வரும் மாறியைக் கொண்ட இவ் வகையான சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைப்பதென்பது சற்றுச் சிக்கலானது. w- அளவுகோலை அமைக்க மடக்கை அளவுகோலையோ அல்லது வேறுவித அளவுகோலையோ நேரடியாகப் பயன்படுத்த முடியாது. ஒவ்வோர் அளவீட்டுக்கும் ஒரு சில கணக்கீடுகளைச் செய்தே w-அளவுகோலை அமைக்க வேண்டியிருக்கும். w-அளவுகோலை அமைப்பதற்குச் செய்யவேண்டிய கணக்கீடுகள் யாவை, w-அளவுகோலை அமைப்பதெப்படி

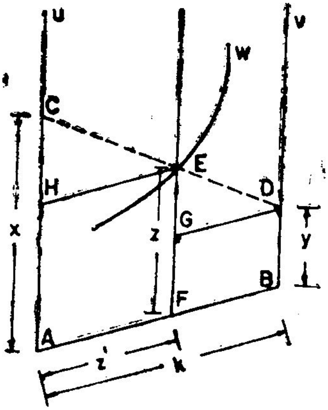
என்பவைகளுக்குக் கீழே விளக்கங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. u, v-அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். w - அளவுகோல், பொதுவாக ஒரு வளைகோட்டின் மீது அமைவதாகக் கொள்ளலாம்.

படம் 102-இல் A, B என்ற புள்ளிகள் முறையே u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஆகும். AB-யின் நீளத்தை k என்க. u, v-அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன் பாடுகளை முறையே

$$x = m_1 f_1(u)$$

$$y = m_2 f_2(v)$$

எனக் கொள்க. சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w-மதிப்புகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவேண்டு மெனில், w-அளவுகோலை அமைப்பது எப்படி ?



படம் 102

u, v-மதிப்புகளுக்கு வரையப்பட்ட CD என்ற குறியிணைப்புக் கோடு, w - அளவுகோலை E என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். AB-ஐ F-ல் வெட்டுமாறு u, v-அச்சுகளுக்கு இணையாக EF என்ற கோட்டை வரைக. H, G என்ற புள்ளிகள் முறையே AC, FE என்ற நேர்கோடுகளின்மீது இருக்குமாறு AB-க்கு இணையாக EH, DG என்ற கோடுகள் வரைக. $AF = z'$ என்றும் $FE = z$ என்றும் கொள்க. $\triangle HCE$, $\triangle GED$ இரண்டும் வடிவொத்தன.

எனவே,

$$\frac{HC}{HE} = \frac{GE}{GD}$$

இங்கு $H_ = AC - HC$

$$= AC - FE$$

$$HE = AF$$

$$GE = FE - FG$$

$$= FE - BD$$

$$GD = FB$$

$$= AB - AF$$

ஆகவே $\dfrac{AC-FE}{AF} = \dfrac{FE-BD}{AB-AF}$

$AC = x$, $BD = y$ ஆதலால்

$$\frac{x-z}{z'} = \frac{z-y}{k-z'}$$

குறுக்குப் பெருக்கினல்,

$$x\,(k - z') - z\,(k - z') = z'\,(z - y)$$

புற மாற்றத்தால் $x\,(k - z') + yz' = kz$

இரு பக்கங்களையும் $(k - z')$-ஆல் வகுக்க

$$x + \frac{yz'}{k-z'} = \frac{kz}{k-z'}$$

இதில் x, y இவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$m_1 f_1(u) + m_2 f_2(v) \frac{z'}{k-z'} = \frac{kz}{k-z'}$$

அதாவது $f_1(u) + f_2(v)\left[\dfrac{m_2\, z'}{m_1\,(k-z')}\right] = \dfrac{kz}{m_1\,(k-z')}$

இச் சமன்பாடு $f_1(u) + f_2(v)\, f_3(w) = f_4(w)$

என்ற கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்

$$f_3(w) = \frac{m_2 z'}{m_1 (k-z')} \quad \ldots \quad (1)$$

$$f_4(w) = \frac{kz}{m_1 (k-z')} \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-இல் இருந்து

$$km_1 f_3(w) - m_1 z' f_3(w) = m_2 z'$$

அதாவது $km_1 f_3(w) = z' [m_1 f_3(w) + m_2]$

எனவே $$z' = \frac{km_1 f_3(w)}{m_1 f_3(w) + m_2}$$

(2)-இல் இருந்து

$$z = \frac{m_1 (k-z') f_4(w)}{k}$$

இதில் z'-இன் மதிப்பைப் பதிலிட

$$z = \frac{m_1}{k}\left[k - \frac{km_1 f_3(w)}{m_1 f_3(w) + m_2}\right] f_4(w)$$

$$= \frac{m_1 m_2 f_4(w)}{m_1 f_3(w) + m_2}$$

w-வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய z'-இன் மதிப்புகளையும், z-இன் மதிப்புகளையும் கணக்கிட்டு, w-அளவுகோலுக்குரிய அளவுக் குறியீடுகளை அதாவது w-அச்சுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறிக்க வேண்டும். குறித்த புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு ஒன்று வரையவேண்டும். இவ் வளைகோடே w-அச்சாகும். w-அளவுகோலின் மீதுள்ள புள்ளிகள், z', z என்ற ஆயங்களால் (co-ordinates) குறிக்கப்படுகின்றன. u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடே z'-அச்சாகும். u-அளவுகோலுக்குரிய கோடே z-அச்சாகும். z', z-அச்சுகள் செங்குத்து அச்சுகளாக (perpendicular axes) இருக்கவேண்டிய கட்டாயம் இல்லை. z', z-அச்சுகள் செங்குத்தாக இல்லையேல் இவற்றிற்குச் சரிவு அச்சுகள் (oblique axes) எனப் பெயர். வசதிக்காக, z', z - அச்சுகள் செங்குத்தாக இருக்குமாறு, u, v-அளவுகோல்களை அமைத்துக்கொள்ளலாம்.

w-வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான z', z-மதிப்புகளை அட்டவணை அமைப்பில் கணக்கிட்டு வைத்துக்கொள்வது நல்லது. இக் கணக்கீடுகளுக்கு வசதியாக z', z-மதிப்புகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு எழுதிக்கொள்ளலாம்.

$$z' = \frac{k\, f_3(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$z = \frac{m_2\, f_4(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

எனவே

$$f_1(u) + f_2(v)\ f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்க

$$x = m_1\, f_1(u)$$
$$y = m_2\, f_2(v)$$

என்ற அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின்மீது ஒரே திசையில் செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும். பின்னர் w-அளவு கோலை z', z-ஆயங்களின் உதவியால் அமைக்கவேண்டும். z'-ஆயத்தை u-அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து, u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோடு செல்லும் திசையில் அளக்கவேண்டும் என்பதையும், z-ஆயத்தை u, v-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டிலிருந்து, u-அளவுகோல் செல்லும் திசையில் அளக்கவேண்டும் என்பதையும் நினைவிற் கொள்க.

குறிப்பு :

$f_3(w) = 1$ எனில்,

$$z' = \frac{k\, m_1}{m_1 + m_2}$$

$$z = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\, f_4(w)$$

அதிகாரம் மூன்றில் இவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டே

$$f_1(u) + f_2(v) = f_4(w)$$

என்ற வகைச் சமன்பாட்டுக்கு மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையம் அமைக்கப்பட்டது என்பதைக் காணலாம்.

$$f_1(u) - f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்க

$$x = m_1 f_1(u)$$

$$y = m_2 f_2(v)$$

என்ற அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின்மீது ஒன்றுக் கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும். w-அளவுகோலை

$$f_1(u) + f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில் அமைத்தது போலவே அமைக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 37

$M_e = \dfrac{M_r + \sqrt{M_r^2 + T^2}}{2}$ என்ற வாய்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. இதில்

M_e = நிகர் வளைவு திருப்புத் திறன் (bending moment), கி.கி. - மீ.

M_r = வளைவு திருப்புத் திறன், (15 - 70) கி.கி. - மீ.

T = இரட்டைத் திருப்புத் திறன், (0 - 50) கி.கி. - மீ.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை நேமவரையம் அமைப் பதற்கு ஏற்ப மாற்றி அமைத்துக்கொள்ளலாம்.

$$M_e = \frac{M_r + \sqrt{M_r^2 + T^2}}{2}$$

குறுக்குப் பெருக்கிப் புற மாற்றம் செய்து இருபடி எடுத்தால்

$$(2\,M_e - M_r)^2 = M_r^{\,2} + T^2$$

விரித்தெழுதிப் புறமாற்றம் செய்யின்

$$T^2 + 4M_e\,M_r = 4M_e^{\,2}$$

இது $f_1(u) + f_2(v)\,f_3(w) = f_4(w)$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. இதில்

$$f_1(u) = T^2$$

$$f_2(v) = 4M_r$$

$$f_3(w) = M_e$$

$$f_4(w) = 4M_e^{\,2}$$

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

T-க்கு $x = m_1\,T^2$

M_r-க்கு $y = m_2\,(4M_r)$

எனக் கொள்க. T-யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1\,(50^2 - 0)$$
$$= 2500\,m_1$$

$m_1 = \dfrac{1}{200}$ எனக் கொள்க. எனவே, T-அளவுகோலின் நீளம் 12.5 செ.மீ. ஆகிறது. M_e-அளவுகோல்மீதுள்ள புள்ளியின் z'-ஆயத்தை T, M_r-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின்மீது அளப்பதால், M_r - அளவுகோல் மீது அதன் தொடக்கப் புள்ளியைக் குறிக்கவேண்டிய தேவை ஏற்படுகிறது. ஆதலால், M_r-இன் கீழ் எல்லை 15 எனக் கொடுத்திருந்தாலும், 0 என எடுத்துக் கொள்க. இப்பொழுது M_r-இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= 4\, m_2\, (70 - 0)$
$= 280\, m_2$

$m_2 = \dfrac{1}{20}$ என எடுத்துக் கொள்க. எனவே, அளவுகோலின் நீளம் 14 செ.மீ. ஆகும். T, M_r-அளவுகோல்களின் நீளங்கள் சமமாயிருக்கத் தேவையில்லை. குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$x = \frac{1}{200}\, T^2$$

$$y = \frac{1}{5}\, M_r$$

ஆகும். $T = 0$, $M_r = 15$ எனில்,

$$M_e = \frac{15 + \sqrt{15^2 + 0}}{2}$$
$$= 15$$

$T = 50$, $M_r = 70$ எனில்,

$$M_e = \frac{70 + \sqrt{70^2 + 50^2}}{2}$$
$$= 78.01$$

இதிலிருந்து M_e- இன் சிறுமம் 15 என்றும், பெருமம் 78.01 என்றும் தெரிகிறது. எனவே M_e- அளவுகோலில் 15 முதல் 78.01 வரையிலாவது அளவீடு செய்துகொள்ள வேண்டும். M_e-இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய z', z - மதிப்புகள் அட்டவணை 19-இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. z', z-மதிப்புகளைக் காண $k = 8$ என எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. எனவே, T, M_r-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் 8 செ.மீ. ஆகும்.

$$z' = \frac{k\, f_3(w)}{f_3(w) + \left(\dfrac{m^2}{m_1}\right)}$$

$$= \frac{8\, M_e}{M_e + 10}$$

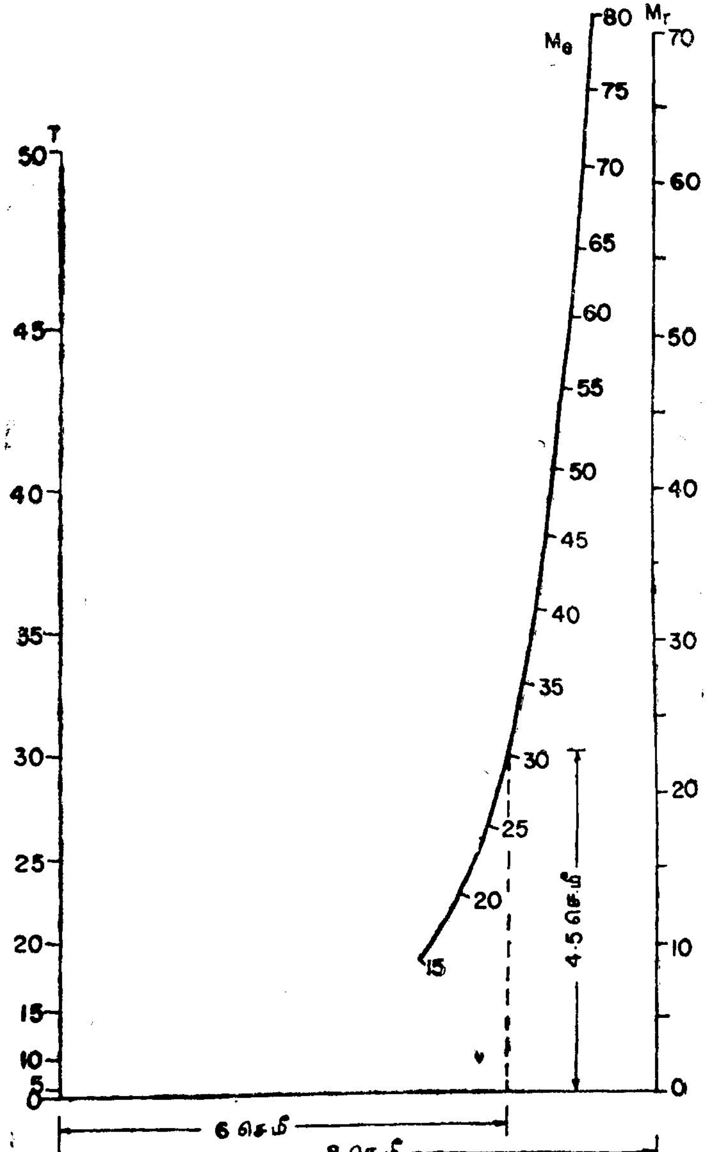
$$z = \frac{m_2 f_4(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$= \frac{M_e^{\,2}}{5\,(Me + 10)}$$

அட்டவணை 19

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
M_e	$M_e + 10$	$8M_e$	$\frac{M_e^2}{5}$	$z' = \frac{(3)}{(2)}$	$z = \frac{(4)}{(2)}$
15	25	120	45	4.80	1.80
20	30	160	80	5.33	2.67
25	35	200	125	5.71	3.57
30	40	240	180	6.00	4.50
35	45	280	245	6.22	5.44
40	50	320	320	6.40	6.40
45	55	360	405	6.55	7.36
50	60	400	500	6.67	8.33
55	65	440	605	6.77	9.31
60	70	480	720	6.86	10.29
65	75	520	845	6.93	11.27
70	80	560	980	7.00	12.25
75	85	600	1125	7.06	13.24
80	90	640	1280	7.11	14.22

z', z - அச்சுகள் முறையே கிடை அச்சாகவும் நிலைக்குத்து அச்சாகவும் இருக்குமாறு T, M_r - அளவுகோல்களை அமைத்துக்



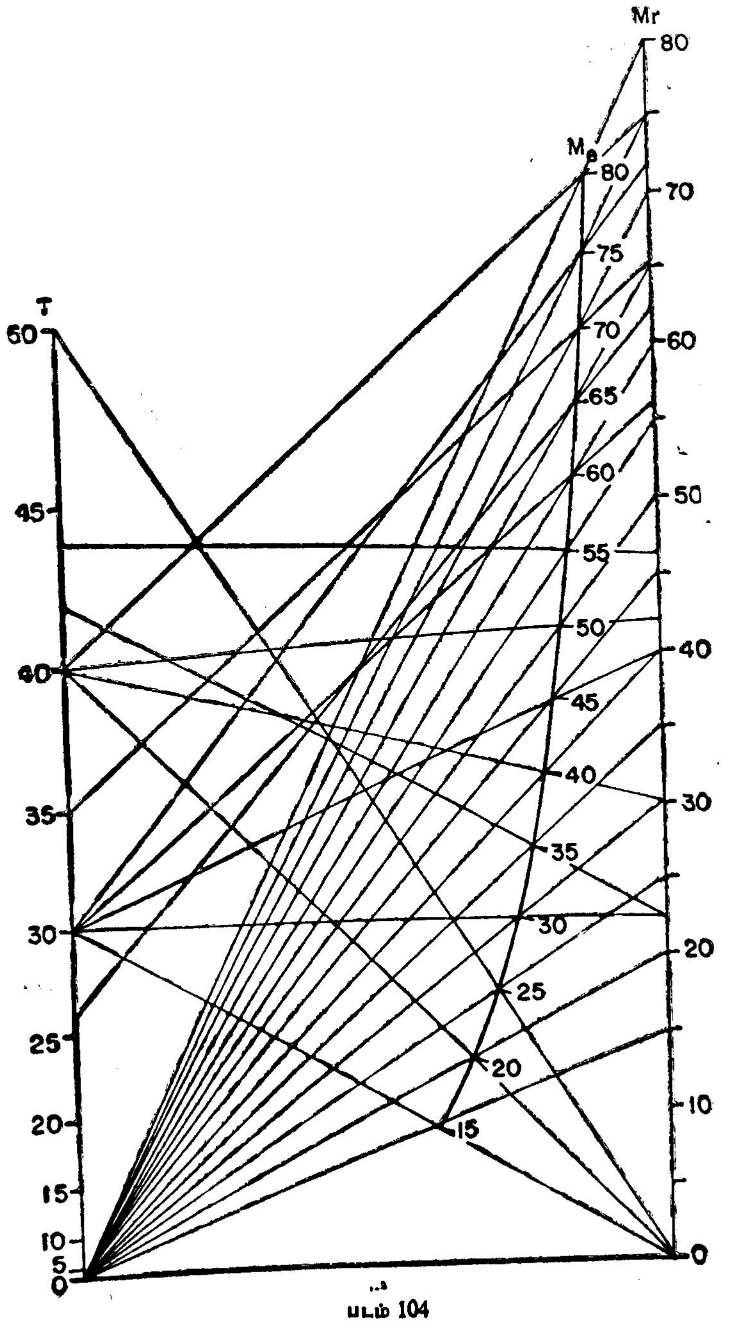
படம் 103

கொண்டால் M_e - அளவுகோலை அமைப்பது எளிது. எனவே, T, M_r - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும்

நேர்கோடு கிடைக்கோடாக வருமாறு, T, M_r - அளவுகோல்களை இரண்டு நிலைக்குத்துக் கோடுகளின் மீது அமைக்கவேண்டும் (படம் 103). இவ்விரு அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் சரியாக 8 செ.மீ. இருக்கவேண்டும். T, M_r - அளவுகோல்களை அமைத்த பிறகு, அட்டவணை 19-இல் கண்டபடி z', z-அச்சுத்தூரங்களை (co-ordinates) அளந்து, M_e - அளவுகோலுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறிக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக, $M_e = 30$ என்ற புள்ளியை எப்படிக் குறிக்க வேண்டும் எனப் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறு குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியாக ஓர் இழைவான வளைகோடு வரைந்தால் அதுவே M_e - அளவுகோலின் அச்சாகும். M_e - அச்சு ஒரு வளைகோடாக இருப்பதால், இதை M_e -வளைகோடு எனவும் கூறலாம். பின்னர், குறித்த புள்ளிகளுக்குரிய அளவீடுகளை எழுதினுல் M_e - அளவுகோல் கிடைக்கும்.

மற்றொரு முறை

படம் 103 - இல் உள்ள நேமவரையத்தில் M_e - அளவுகோலை அமைக்க z', z - ஆயங்கள் கணக்கிடப்பட்டன. z', z - ஆயங்களின் உதவியின்றியே M_e – அளவுகோலை அமைக்க ஓர் எளிய முறை உள்ளது. இதற்கு, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் M_e - இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு ஒத்த T, M_r - மதிப்புகளின் இரண்டு தொகுதிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும் (அட்டவணை 20). எடுத்துக்காட்டாக, $M_e = 40$ எனில் $T = 0$, $M_r = 40$; $T = 40$, $M_r = 30$ என்ற இரண்டு தொகுதி மதிப்புகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். இதிலிருந்து $M_e = 40$ என்ற புள்ளி $T = 0$, $M_r = 40$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோட்டிலும், $T = 40$, $M_r = 30$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோட்டிலும் உள்ளது எனத் தெரிகிறது. ஆகவே, இவ் விரண்டு குறியிணைப்புக் கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே $M_e = 40$ எனத் தெரிகிறது. இவ்வாறு M_e-இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து அப் புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு வரைந்தால், M_e - அளவுகோல் கிடைக்கும் (படம் 104). இவ்வாறு M_e-அளவுகோலை அமைத்து முடித்ததும் அதை அமைக்கப் பயன்படுத்திய பல்வேறு கோடுகளைத் துடைத்தழித்து விடலாம்.


Mr
80
70
60
50
40
30
20
10
0
Ms
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
T
60
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0

படம் 104

M_r - அளவுகோலில் 70 முடிய அளவீடு செய்தால் போதுமானது. ஆனால், Me - அளவுகோலை அமைக்கப் பயன்படுத்திய

அட்டவணை 20

M_e	தொகுதி I		தொகுதி II	
	T	M_r	T	M_r
15	0	15	30	0
20	0	20	40	0
25	0	25	50	0
30	0	30	30	22.5
35	0	35	42	22.4
40	0	40	40	30.0
45	0	45	30	40.0
50	0	50	40	42.0
55	0	55	44	46.2
60	0	60	30	56.25
65	0	65	26	62.4
70	0	70	35	65.625
75	0	75	30	72.0
80	0	80	40	75.0

குறியிணைப்புக் கோடுகளை வரைய M_r - அளவுகோலில் 80 முடிய அளவீடுகள் தேவையிருப்பதால் M_r - அளவுகோல் நீளத்தை மேலும் 2 செ. மீ. நீளத்திற்கு நீட்டிவிட்டு 80 முடிய அளவீடு செய்து கொள்ளவேண்டும்.

குறியிணைப்புக் கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளை வரைந்து வளைகோட்டு அளவுகோலை (curved scale) அமைக்கும் முறையில் சில நன்மைகள் உள்ளன. இம் முறையில் z', z- ஆயங்களைக் கணக்கிடத் தேவையில்லை. மேலும், இணையளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளைக் குறிக்காமலேயே வளைகோட்டு அளவு கோலை அமைக்கலாம். இக் கணக்கில் M_e - அளவுகோலை அமைப் பதற்காக வரையப்பட்டுள்ள குறியிணைப்புக் கோடுகளுக்கு, T, M_r - மதிப்புகளை எளிதாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்வதற் காக M_r – அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்குரிய 0 என்ற அளவீடு படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. $M_r = 0$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்காமலும் M_e - அளவுகோலை அமைக்க முடியும்.

இணையளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கான அளவீடுகள், கொடுக்கப்பட்ட நெடுக்கங்களுக்குள் இல்லையெனில், குறியிணைப்புக் கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளை வரைந்து வளைகோட்டு அளவுகோலை அமைப்பதே எளிய சிறந்த முறையாகும். ஒருவேளை, இணையளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளைக் குறித்தால் கூட, அப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோடு கிடைக்கோடாக இருந்தாலும் இல்லை என்றாலும், குறியிணைப்புக் கோடுகளுக்கான கணக்கீடுகளில் மாற்றம் இருக்காது. மேலும், தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்திற்கும் குறியிணைப்புக் கோடுகளுக்கான கணக்கீடுகளுக்கும் எந்தவிதத் தொடர்பும் இல்லாததால், தொடக்கப் புள்ளிகளுக் கிடையே உள்ள தூரத்தைப் பற்றி அறிந்துகொள்ளத் தேவை இல்லை. இவ்வாறு எல்லா வகையிலும், குறியிணைப்புக் கோடு களின் இரண்டு தொகுதிகளை வரைந்து வளைகோட்டு அளவு கோலை அமைப்பதே நல்லதெனத் தெரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 38

$h = ut - \frac{1}{2} gt^2$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. இதில்

h = உயரம், (0 - 500) மீட்டர்.

u = தொடக்கத் திசைவேகம், (0 - 100) மீ. / நொடி.

t = நேரம், நொடி.

g = 9. 81 மீ. / நொடி ^{2}.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் $g = 9.81$ எனப் பதிலிட

$$h = ut - 4.905\,t^2$$

அதாவது $h - ut = -4.905\,t^2$

இச் சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில்

$$x = m_1 h$$

$$y = m_2 u$$

என்ற அளவுகோல்களை இரு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்

கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும்.
h — இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (500 - 0)$$
$$= 500\, m_1$$

$m_1 = \frac{1}{50}$ எனக் கொள்க. u - வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 (100 - 0)$$
$$= 100\, m_2$$

$m_2 = \frac{1}{10}$ எனக் கொள்க. இப்பொழுது குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள்

$$h\text{ - அளவுகோலுக்கு} \quad x = \frac{1}{50} h$$

$$u\text{ - அளவுகோலுக்கு} \quad y = \frac{1}{10} u$$

ஆகும். t - யின் சிறுமம் 0 ஆகும். நிலைக்குத்தாக எறியப்பட்ட பொருள் நிலத்தை மீண்டும் வந்தடையும் பொழுது உள்ள t - யின் மதிப்பு, t - யின் பெருமமாக இருக்கும். நிலத்தில் h - இன் மதிப்பு 0 ஆகும்.

$$h = 0 \text{ எனில் } ut - \tfrac{1}{2}\, gt^2 = 0$$

$$\text{அதாவது } t\,(u - \tfrac{1}{2}\, gt) = 0$$

எனவே $t = 0$ அல்லது $t = \frac{2u}{g}$. $t = 0$ என்பது தொடக்க நேரத்தையும் $t = \frac{2u}{g}$ என்பது தூக்கி எறியப்பட்ட பொருளானது மீண்டும் நிலத்தை வந்தடையும் நேரத்தையும் கொடுக்கின்றன. எனவே, t - யின் சிறுமம் 0 என்றும், t - யின் பெருமம் $\frac{2u}{g}$ என்றும் தெரிகிறது. ஆனால், u- வின் பெருமம் 100 என்பதால்

$$t\text{ - யின் பெருமம் } = \frac{2(100)}{9.81}$$

$$= 20.39$$

எனவே, t - அளவுகோலில் 0 முதல் 20 முடிய அளவீடு செய்து கொள்ளலாம்.

$$4.905\, t^2 - ut + h = 0$$

$$\text{எனவே, } t = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4\,(4.905)\,h}}{9.81}$$

இதிலிருந்தும் t - யின் பெருமத்தை 20.39 எனக் காணலாம். t - அளவுகோலை அமைக்க t -யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய z', z - மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்து அட்டவணைப்படுத்திக் கொள்க (அட்டவணை 21). z', z - மதிப்புகளைக்காண $k = 10$ எனக் கொள்ளலாம். எனவே h, u - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையில் உள்ள தூரம் 10 செ. மீ. ஆகும்.

$$z' = \frac{k\, f_3(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$= \frac{10\, t}{t + 5}$$

$$z = \frac{m_2\, f_4(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$= \frac{-\,4.905\, t^2}{10\,(t + 5)}$$

h, u - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் 10 செ. மீ. இருக்குமாறு, இவ்விரு அளவுகோல்களையும் இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது எதிரெதிர்த் திசைகளில் அமைக்கவும் (படம் 105). h, u - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு கிடைக்கோடாகவும், h, u - அளவுகோல்கள் நிலைக்குத்தாகவும் வருமாறு நேம

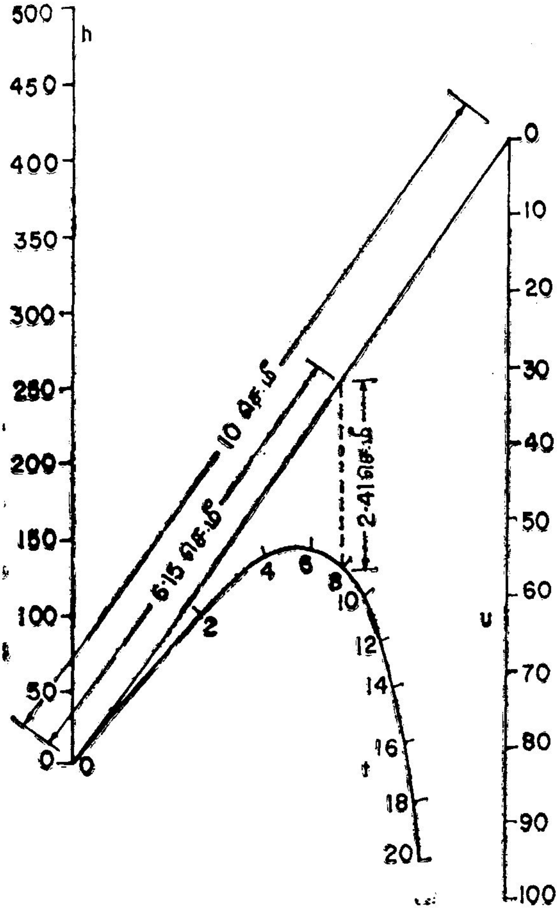
அட்டவணை 21

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
t	$t+5$	$10\,t$	$-0.4905\,t^2$	$z' = \frac{(3)}{(2)}$	$z = \frac{(4)}{(2)}$
0	5	0	0	0	0
2	7	20	— 1.962	2.86	— 0.28
4	9	40	— 7.848	4.44	— 0.87
6	11	60	— 17.658	5.45	— 1.61
8	13	80	— 31.392	6.15	— 2.41
10	15	100	— 49.050	6.67	— 3.27
12	17	120	— 70.632	7.06	— 4.15
14	19	140	— 96.138	7.37	— 5.06
16	21	160	—125.568	7.62	— 5.98
18	23	180	—158.922	7.83	— 6.91
20	25	200	—196.200	8.00	— 7.85

வரையத்தை அமைக்க நினைத்தால் தாளின் நீளம் 20 செ.மீ. தேவைப்படும். எனவே, Z - விளக்கப்படத்தில் அமைத்தது போல, தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை, குறுக்குக் கோடாக எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். z' - ஆயத்தை h - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து, h, u - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு செல்லும் திசையில் அளக்கவேண்டும். z - ஆயத்தை h, u - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டிலிருந்து, h - அளவுகோல் செல்லும் திசையில் அளக்கவேண்டும். z - ஆயங்கள் குறை எண்களாக இருப்பதால், t - அளவுகோலுக்குரிய புள்ளிகள், குறுக்குக் கோட்டுக்குக் கீழே இருக்கும். z', z - ஆயங்களை அளந்து, t - யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்த பின்னர், இப் புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு வரைந்தால் தேவையான t- அளவுகோல் கிடைக்கும். எடுத்துக்காட்டாக $t = 8$ என்ற புள்ளியை எப்படிக் குறிப்பது எனப் படத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில், குறியிணைப்புக் கோடுகள் t - அளவுகோலை வெட்டினால் இரண்டு இடங்களில் வெட்டும் எனத் தெரிகிறது. இதிலிருந்து t - க்கு இரண்டு மதிப்புகள் உண்டு என அறியலாம். t - யின் ஒரு மதிப்பு, தூக்கி எறியப்பட்ட

பொருளானது மேல்நோக்கிச் செல்லும்பொழுது கொடுக்கப்பட்ட உயரத்தைக் கடக்கும் நேரத்தைக் குறிக்கும். t - யின் மற்ருெரு மதிப்பு, அப்பொருளானது கீழ்நோக்கி வரும்பொழுது, கொடுக்கப்பட்ட உயரத்தைக் கடக்கும் நேரத்தைக் குறிக்கும். h - இன் மதிப்பு மிகுதியாகவும், u - வின் மதிப்பு குறைவாகவும்



படம் 105

இருந்தால் இந்த மதிப்புகளுக்கு வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக் கோடு t - அளவுகோலை வெட்டாது. இதன் காரணம் என்ன

வெனில், கொடுக்கப்பட்ட உயரத்தை அடையப் போதுமான அளவில் பொருளின் தொடக்கத் திசைவேகம் இல்லை.

ஏதேனும் ஒரு குறியிணைப்புக் கோடு t - வளைகோட்டுக்குத் தொடுகோடாக (tangent) இருப்பின், அக் குறியிணைப்புக் கோட்டுக்குரிய u, h, t - மதிப்புகள் முறையே பொருளின் தொடக்கத் திசைவேகத்தையும், அவ் வேகத்தில் தூக்கி எறியப்பட்ட பொருள் அடையும் பெரும உயரத்தையும் (maximum height), அப்பெரும உயரத்தை அடைவதற்கான நேரத்தையும் குறிக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 39

$a \tan x + b \sec x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. a (-1 முதல் 1 முடிய) ; b (-1 முதல் 1 முடிய), x (0° - 180°).

$$a \tan x + b \sec x + 1 = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை $\tan x$ - ஆல் வகுத்துப் புறமாற்றம் செய்து

$$a + b \operatorname{cosec} x = -\cot x$$

என மாற்றி எழுதிக் கொள்க. இச் சமன்பாடு

$$f_1(u) + f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. இச்சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில்,

$$y = m_1 a$$
$$s = m_2 b$$

என்ற அளவுகோல்களை இரு இணைகோடுகளின் மீது ஒரே திசையில் செல்லுமாறு அமைக்க வேண்டும். $m_1 = 5$, $m_2 = 5$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. a, b - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு கிடைக்கோடாக வருமாறு, இவ்விரு அளவுகோல்களையும் இரண்டு நிலைக்குத்துக் கோடுகளின் மீது அமைத்துக்கொள்ளலாம். $a = 0$, $b = 0$ என்ற புள்ளிகள் முறையே a, b - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஆகும். a, b - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 8 செ.மீ. எனக் கொள்க.

எனவே,

$$z' = \frac{k\, f_3\,(w)}{f_3\,(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$= \frac{8\ cosec\ x}{cosec\ x + 1}$$

$$z = \frac{m_2 f_4\,(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$= \frac{-5\ cot\ x}{cosec\ x + 1}$$

a, b - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டை X - அச்சாகவும், a- அளவுகோலுக்குரிய கோட்டை Y- அச்சாகவும் கருதினுல், z', z - ஆயங்களை முறையே X, Y -ஆயங்கள் என்று சொல்லலாம். கிடை அச்சு, நிலைக்குத்து அச்சு இவற்றைக் குறிக்க x, y என்ற எழுத்துகளே பொது வாகப் பயன்படுத்தப்படும். நேமவரையம் அமைக்கப்பட வேண் டிய சமன்பாட்டில் x வருவதால், கிடை அச்சு, நிலைக்குத்து அச்சு இவற்றைக் குறிக்க X, Y என்ற எழுத்துகள் பயன்படுத்தப்படு கின்றன. X, Y - ஆயங்களைக் கார்டீசியன் ஆயங்கள் (cartesian co-ordinates) என்று கூறுவர். எனவே,

$$X = \frac{8\ cosec\ x}{cosec\ x + 1}$$

$$Y = \frac{-5\ cot\ x}{cosec\ x + 1}$$

x - அளவுகோலை அமைப்பதற்கு மூன்று முறைகள் உள்ளன. x - இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான X, Y - ஆயங்களைக் கணக் கிட்டு, அளந்து, x - அளவுகோலுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து, பின்னர் x - வளைகோட்டை வரைவது ஒரு முறை. X, Y - ஆயங் களின் உதவியின்றி, x - இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான இரண்டு குறியிணைப்புக்கோடுகள் வரைந்து, x - அளவுகோலுக் குரிய புள்ளிகளைக்குறித்து, பின்னர் x - வளைகோட்டை வரைவது இரண்டாவது முறை. x - வளைகோட்டுக்குரிய சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்து அதிலிருந்து x - வளைகோட்டை வரைந்து, பின்னர்

x - இன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரு குறியிணைப்புக் கோடு வரைந்து x - அளவுகோலை அமைப்பது மூன்றுவது முறை. முதலிரண்டு முறைகளும் எடுத்துக்காட்டு 37-இல் விளக்கப்பட்டன. முதல் முறையில் கணக்கீட்டு வேலை மிகுதி. இரண்டாவது முறையில் கணக்கீட்டு வேலையை எளிமையாக்கிக் கொள்வதோடு இன்னும் சில நன்மைகளைப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில் x - அளவுகோலை அமைப்பதற்கு மூன்றுவது முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது. முதலில்

$$X = \frac{8 \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x + 1} \quad \dots \quad (1)$$

$$Y = \frac{-5 \cot x}{\operatorname{cosec} x + 1} \quad \dots \quad (2)$$

என்ற இரு தொடர்புகளிலிருந்தும், x - ஐ நீக்கம் செய்து (eliminate) X, Y இவற்றுக்குள்ள தொடர்பைக் காண்க.

(1) - இன் இரு பக்கங்களிலிருந்தும் 4 - ஐக் கழிக்க

$$X - 4 = \frac{8 \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x + 1} - 4$$

சுருக்க $X - 4 = \dfrac{4 (\operatorname{cosec} x - 1)}{\operatorname{cosec} x + 1}$

பகுதி விகுதி இரண்டையும் $(\operatorname{cosec} x + 1)$-ஆல் பெருக்க

$$X - 4 = \frac{4 \cot^2 x}{(\operatorname{cosec} x + 1)^2}$$

இதில் $\dfrac{-5 \cot x}{\operatorname{cosec} x + 1} = Y$ என்று பதிலிட

$$X - 4 = \frac{4 Y^2}{25}$$

எனவே, $Y^2 = \dfrac{25}{4}(X - 4)$

இச் சமன்பாடு ஒரு பரவளையத்தைக் (parabola) குறிக்கிறது. இப் பரவளையமே x- வளைகோடாகும். இதன் உச்சி (vertex)

(4, 0) என்ற புள்ளி ஆகும். இப் பரவளையத்தின் அச்சு (axis), X- அச்சு ஆகும். ஆகவே, x - அளவுகோலை அமைப்பதன் முதற் கட்டமாக,

$$Y^2 = \frac{25}{4}(X - 4)$$

என்ற பரவளையத்தை வரைந்துகொள்ளவேண்டும். இப் பரவளையத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகள் சிலவற்றைச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிட்டு, அவற்றைக் குறித்து, பின்னர் இப் புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு ஒன்றை வரைந்தால் தேவையான பரவளையம் கிடைக்கும்.

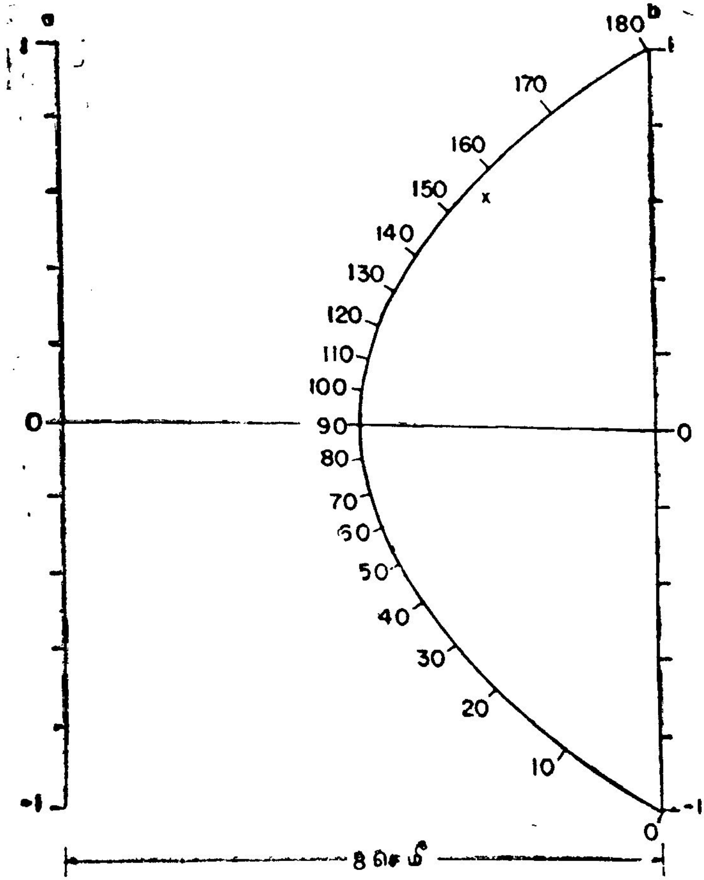
அட்டவணை 22

x (பாகை)	$-\cos x$	x (பாகை)	$-\cos x$
0	— 1.000	100	0.174
10	— 0.985	110	0.342
20	— 0.940	120	0.500
30	— 0.866	130	0.643
40	— 0.766	140	0.766
50	— 0.643	150	0.866
60	— 0.500	160	0.940
70	— 0.342	170	0.985
80	— 0.174	180	1.000
90	0		

இப்பொழுது x-வளைகோடு வரையப்பட்டுள்ளதே தவிர இன்னும் அதன் மீது அளவீடுகள் செய்யப்படவில்லை.

$$a \tan x + b \sec x + 1 = 0$$

என்பதில் $a = 0$ எனப் பதிலிட்டால் $b = -\cos x$ எனக் கிடைக்கிறது. எனவே $a = 0$ என்ற புள்ளியையும், $b = -\cos(x_0)$ என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடு x- அளவுகோலை x_0 என்ற அளவீட்டில் வெட்டும். எனவே, x - அளவுகோலில் 0, 10, 20, ..., 180 என்ற அளவீடுகள் செய்ய $a = 0$ என்ற புள்ளியை முறையே b - அளவுகோலின் $-\cos 0°$, $-\cos 10°$, $-\cos 20°$, ..., $-\cos 180°$ என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் குறியிணைப்புக்



படம் 106

கோடுகளை வரையவேண்டும். x - இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான $-\cos x$ என்பதன் மதிப்புகள் அட்டவணை 22 - இல்

உள்ளன. வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக் கோடுகள் x-வளை கோட்டை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும். x - அளவுகோலை அமைத்து முடித்ததும், குறியிணைப்புக் கோடுகளைத் துடைத் தழித்து விடலாம். அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையம் படம் 106-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

வளைகோட்டுக்குரிய சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, தேவையான வளைகோட்டை வரைவதற்குக் கணக்கீடுகள் மிகுதியாக இருக்கும். சில கணக்குகளில், வளைகோட்டுக்குரிய சமன் பாட்டைக் கண்டுபிடிப்பதே அரிதாக இருக்கும். எனவே, இந்த முறையைக் காட்டிலும் குறியிணைப்புக் கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளை வரைந்து வளைகோட்டு அளவுகோலை அமைக்கும் இரண்டாவது முறையே எளிய முறையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 40

$a \sin x + b \cos x = 1$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. $a\ (1 - 2)$; $b\ (0 - 1)$; $x\ (0° - 90°)$.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை $\sin x$ - ஆல் வகுத்து

$$a + b \cot x = \operatorname{cosec} x$$

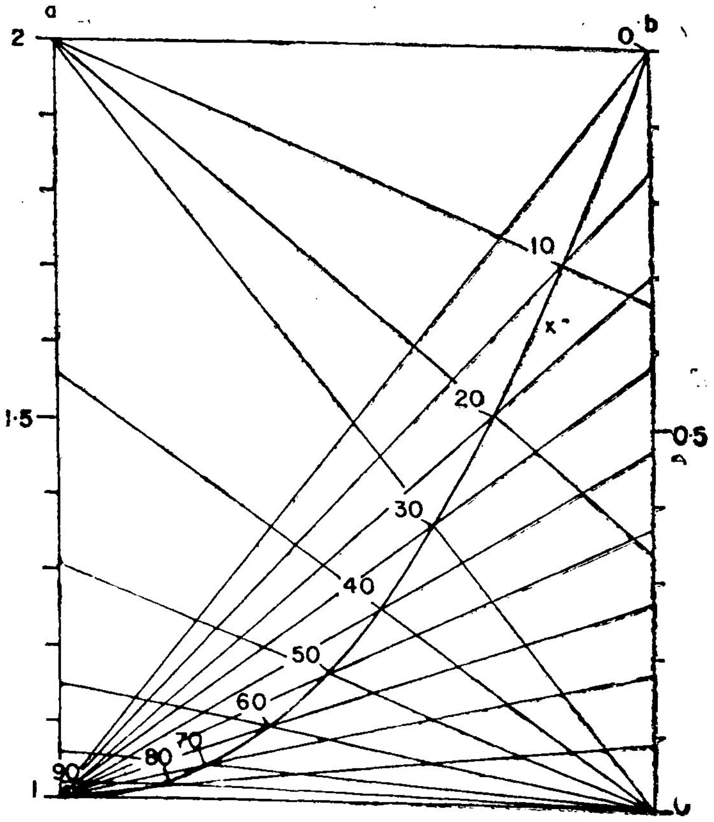
என $f_1(u) + f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$

என்ற அமைப்பில் எழுதிக் கொள்க. எனவே, a, b - அளவு கோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது அமைக்கவேண்டும். a, b - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$y = m_1 a$$

$$s = m_2 b$$

எனக் கொள்க. $m_1 = 10, m_2 = 10$ எனக் கொள்க. a, b - அளவு கோல்களின் இடைத்தூரத்தை வசதிக்காக 8 செ.மீ. எனக் கொள்ளலாம். a, b - அளவுகோல்களை அமைத்த பின்னர், x - அளவுகோலை அமைக்க வேண்டும் படம் (107). a - அளவு கோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கான 0 என்ற அளவீடு a - யின் நெடுக்கத்திற்குள் இல்லாததால், குறியிணைப்புக் கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளை வரைந்து x- அளவுகோலை அமைப்பதே எளிய முறையாகும்.



படம் 107

$$a \sin x + b \cos x = 1$$

என்பதில் $b = 0$ எனில் $a = \operatorname{cosec} x$. எனவே, $b = 0$ என்ற புள்ளியை a - அளவுகோலின் cosec $0°$, cosec $10°$,..., cosec $90°$ என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் குறியிணைப் புக் கோடுகளின் மீது முறையே x - அளவுகோலின் 0, 10, ..., 90 என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகள் இருக்கும். cosec $0°$, cosec $10°$, ..., cosec $90°$ என்பவற்றின் மதிப்புகள் முறையே ∞, 5.76, 2 92, 2, 1.56, 1.31, 1.15, 1.06, 1.02, 1 எனக் கோணக் கணிதப்பட்டியல்களில் காணலாம். a - அளவுகோலில் ∞. 5.76, 2.92 என்ற அளவீடுகள் செய்யப்படவில்லை. மேலும் இந்த அளவீடுகளைக் குறிக்கத் தாளின் நீளம் ஒத்து வராது. எனவே, $x = 0$, 10, 20 என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும்

குறியிணைப்புக் கோடுகளை வரைய $a = 2$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே,

$$b = \frac{1-2\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x - 2\tan x$$

$x = 0$ எனில் $b = \sec o - 2\tan o = 1$

$x = 10$ எனில் $b = \sec 10^\circ - 2\tan 10^\circ = 0.66$

$x = 20$ எனில் $b = \sec 20^\circ - 2\tan 20^\circ = 0.34$

எனவே $a = 2$ என்ற புள்ளியை $b = 1$, $b = 0.66$, $b = 0.34$ என்ற புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடுகளின் மீது முறையே $x = 0$, $x = 10$, $x = 20$ என்ற புள்ளிகள் இருக்கும்.

மேற்கூறிய கணக்கீடுகளின்படி $x = 0, 10, \ldots, 90$ என்ற புள்ளிகளுக்கான குறியிணைப்புக் கோடுகளின் தொகுதி ஒன்றை வரைந்து கொள்ளலாம். இதுபோல இப்புள்ளிகளுக்கான குறியிணைப்புக் கோடுகளின் மற்ெறாரு தொகுதியை வரைந்தால் x - வளைகோட்டுக்குரிய புள்ளிகளும் அவைகளுக்கு ஒத்த அளவீடுகளும் தெரிந்துவிடும்.

$a = 1$ எனில் $b = \frac{1-\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1-\cos(90^\circ - x)}{\sin(90^\circ - x)}$$

$$= \frac{2\sin^2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)\left[\cos 45^\circ - \frac{x}{2}\right]}$$

$$= \tan\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)$$

எனவே $x = 0, 10, \ldots\ldots, 90^\circ$ என்ற புள்ளிகள் முறையே $a = 1$ என்ற புள்ளியை b - அளவுகோலின் $\tan 45^\circ$, $\tan 40^\circ, \ldots$, $\tan 0^\circ$ என்ற புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடுகளின் மீது இருக்கும். $\tan 45^\circ$, $\tan 40^\circ, \ldots$, $\tan 0^\circ$ என்பவற்

றின் மதிப்புகள் முறையே 1, 0.84, 0.70, 0.58, 0.47, 0.36, 0.27, 0.18, 0.09, 0 ஆகும்.

இவ்வாறு x - அளவுகோலில் குறிக்கப்படவேண்டிய ஒவ்வோர் அளவீட்டுக்கும் இரண்டு குறியிணைப்புக் கோடுகளை வரைய வேண்டும். இவ்விரண்டு கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே அந்த அளவீட்டுக்குரிய புள்ளியாகும். ஒத்த குறியிணைப்புக் கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகள் வழியாக ஓர் இழைவான வளைகோடு வரைந்தால் தேவையான x - வளைகோடு கிடைக்கும். பின்னர் $x = 0,\ 10, \ldots, 90$ என்ற புள்ளிகளுக்குரிய அளவீடுகளை எழுதவேண்டும். அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேம வரையம் படம் 107 - இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. 0, 10, ..., 90 என்பவற்றைத்தவிர, இவைகளுக்கிடையில் உள்ள வேறு சில அளவீடுகளை x - வளைகோட்டின் மீது குறிக்க விரும்பினுல், தேவையான அளவீடு ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரு குறியிணைப்புக் கோடு வரைந்து, இக்குறியிணைப்புக் கோடானது x - வளைகோட்டை வெட்டுமிடத்தில் அதற்குரிய அளவீட்டைச் செய்யவேண்டும். 0,10,....., 90 என்ற அளவீடுகளுக்கிடையில் உள்ள வளைகோட்டுத் தூரங்கள் (arcual distances) எவ்விதத்தில் மாறுபடுகின்றன என்பதை வைத்துக் கண்மதிப்பாகவும் இடையில் உள்ள வேறு சில அளவீடுகளைச் செய்யலாம். கண்மதிப்பாக அளவுக் குறியீடு செய்வதில், எதிர்பார்க்கும் அளவு துல்லியம் இருக்காது.

எடுத்துக்காட்டு 41

$\alpha = \phi - e \sin \phi$ என்ற கெப்ளரின் சமன்பாட்டுக்கு (Kepler's equation) ஒரு நேமவரையம் அமை. இங்கு,

e = கோளின் (planet) சுற்றுப்பாதையின் (orbit) மையப்பிறழ்ச்சி (eccentricity), (0 - 1).

α = ஆரையன் அளவையில் (radian measure) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோணம், $(0 - \pi)$.

ϕ = ஆரையன் அளவையில் கொடுக்கப்பட்ட மற்ருெரு கோணம், $(0 - \pi)$.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\alpha + e \sin \phi = \phi$$

எனப் படித்தர அமைப்பில் (standard form) எழுதிக் கொள்க, α, e - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$x = m_1 \alpha$$

$$y = m_2 e$$

எனக் கொள்க. $m_1 = 3$, $m_2 = 10$ என எடுத்துக் கொள்க. எனவே, α - அளவுகோலின் நீளம் 3π அதாவது 9.425 செ.மீ. ஆகும். e - அளவு கோலின் நீளம் 10 செ.மீ. ஆகும். α, e-அளவு கோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒரே திசையில் செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும் (படம் 108). α, e - அளவு கோல்களின் இடைத் தூரத்தை வசதிக்காக 8 செ மீ. என எடுத்துக் கொள்ளலாம். முந்திய எடுத்துக்காட்டில் கையாண்ட முறையைப் பின்பற்றி இந்த எடுத்துக்காட்டிலும் வளைகோட்டு அளவுகோலை அமைக்கலாம்.

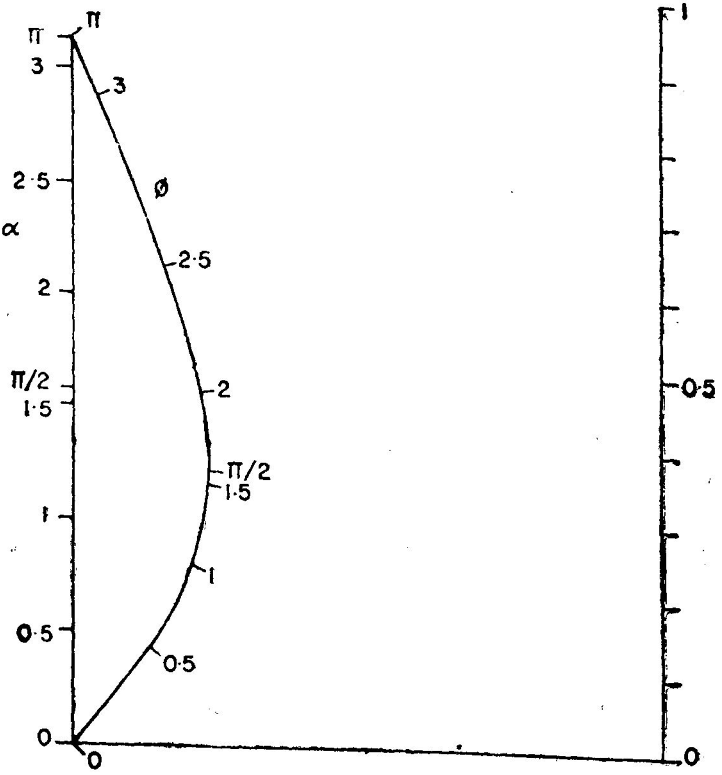
அட்டவணை 23

ϕ (ஆரையன் அளவை)	$\sin\phi$	$\alpha = \phi - \sin\phi$
0	0	0
0.5	0.4794	0.0206
1.0	0.8415	0.1585
1.5	0.9975	0.5025
$\pi/2$ = 1.5708	1.0000	0.5708
2.0	0.9093	1.0907
2.5	0.5984	1.9016
3.0	0.1411	2.8589
π = 3.1416	0	3.1416

$$\alpha + e \sin\phi = \phi$$

என்னும் சமன்பாட்டில் $e = 0$ எனில் $\alpha = \phi$. எனவே ϕ - அளவு கோலின் 0, 0.5, 1, 1.5, $\pi/2$, 2, 2.5, 3, π என்ற அளவீடு

களுக்குரிய புள்ளிகள் முறையே $e = 0$ என்ற புள்ளியை α - அளவுகோலின் 0, 0.5, 1, 1.5, $\pi/2$, 2, 2.5, 3, π என்ற அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடுகளின் மீது இருக்கும்.



படம் 108

ϕ - அளவீடுகளுக்கான புள்ளிகளைக் குறிக்க, இப்புள்ளிகளுக் குரிய குறியிணைப்புக் கோடுகளின் மற்றொரு தொகுதியை வரைய வேண்டும். கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் $e = 1$ எனில் $\alpha = \phi - \sin\phi$. ϕ - யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான $(\phi - \sin\phi)$ என்பதன் மதிப்புகள் அட்டவணை 23-இல் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. எனவே, $e = 1$ என்ற புள்ளியை அட்டவணையின் இறுதி நிரலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள α - வின் மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடுகளின் மீது முறையே $\phi = 0$, 0.5, 1. 1.5, $\pi/2$, 2, 2.5, 3, π என்ற புள்ளிகள் இருக்கும்.

ϕ அளவுகோலில் குறிக்கப்படவேண்டிய ஒவ்வோர் அளவீட்டுக்கும் இரண்டு குறியிணைப்புக் கோடுகள் வரைந்தால் அவை வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியே அந்த அளவீட்டுக்குரிய புள்ளியாகும். ϕ - யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குக் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியாக வரையப்பட்ட இழைவான வளைகோடே ϕ - வளைகோடாகும். பின்னர், குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளுக்குரிய அளவீடுகளை எழுதி, ϕ - அளவுகோலை அமைத்து முடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 42

$b\,x = a^x$ என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காண ஒரு நேம வரையம் அமை. $a\,(1 - 10)$; $b\,(1 - 10)$; $x\,(0.1 - 0\text{-}5)$.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை மடக்கை அமைப்பில்

$$\log b + \log x = x \log a$$

அதாவது $\log b - (\log a)\,x = -\log x$

என மாற்றி எழுதிக்கொள்க. இச் சமன்பாட்டை

$$f_1\ (u) - f_2\ (v) f_3\ (w) = f_4\ (w)$$

என்ற அமைப்பில் இருப்பதாகக் கருதினுல்

$$y = m_1 \log b$$
$$s = m_2 \log a$$

என்னும் b, a- அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்க வேண்டும். $m_1 = 10$, $m_2 = 10$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொள்க. a, b - அளவுகோல்களை அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோல்களின் உதவியால் எளிதில் அமைக்கலாம். வசதிக்காக, a, b-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் 8 செ. மீ. ஆக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. குறியிணைப்புக் கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளை வரைந்து x - அளவுகோலை அமைக்கலாம்.

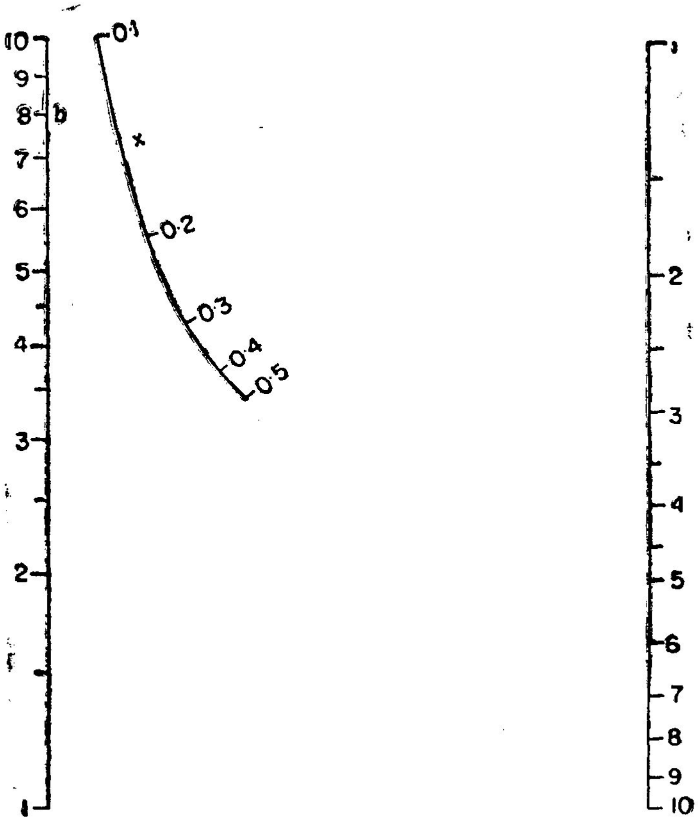
$bx = a^x$ என்பதில் $a = 1$ எனில் $b = \dfrac{1}{x}$. எனவே, $x = 0.1$, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 என்ற புள்ளிகள் முறையே $a = 1$ என்ற புள்ளியை $b = 10$, 5, 3.33, 2.5, 2 என்ற புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடுகளின் மீது இருக்கும்.

$bx = a^x$ என்பதில் $a = 10$ எனில் $b = \frac{10^x}{x}$. x - இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான $\frac{10^x}{x}$ என்பதன் மதிப்புகள் அட்டவணை 24 - இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, $x = 0.1$, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 என்ற புள்ளிகள் முறையே $a = 10$ என்ற புள்ளியை அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள b - யின் மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடுகளின் மீது இருக்கும். b - அளவுகோலில் 10 முடிய அளவீடு செய்தால்

அட்டவணை 24

x	$b = \frac{10^x}{x}$
0.1	$\frac{1.259}{0.1} = 12.590$
0.2	$\frac{1.585}{0.2} = 7.925$
0.3	$\frac{1.995}{0.3} = 6.650$
0.4	$\frac{2.512}{0.4} = 6.280$
0.5	$\frac{3.162}{0.5} = 6.324$

போதும் என்றாலும், $b = 12.59$ என்பதற்குரிய புள்ளியை b-அளவுகோலில் குறித்து வைத்துக் கொள்ளவேண்டும். ஒத்த குறியிணைப்புக் கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளைக் குறித்து, இப் புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு வரைந்து அளவீடு செய்தால் x - அளவுகோல் கிடைக்கும். அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையம் படம் 109–இல் காட்டப் பட்டுள்ளது.



படம் 109

கொடுத்துள்ள சமன் பாட்டை

$$\log b + (\log a)\ (-x) = -\log x$$

என எழுதி, இது

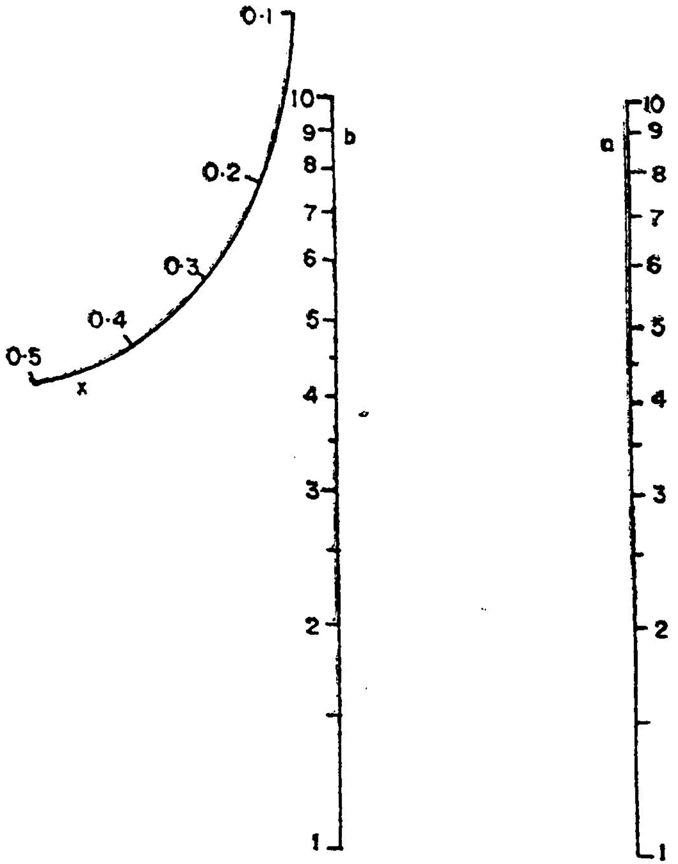
$$f_1(u) + f_2(v)\, f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற அமைப்பில் இருப்பதாகக் கருதலாம் அல்லவா? எனவே,

$$y = 10 \log b$$

$$s = 10 \log a$$

என்ற அளவுகோல்களை இரு இணைகோடுகளின் மீது ஒரே திசையில் செல்லுமாறும் அமைக்கலாம் (படம் 110). $a = 1$, $b = 1$ என்பன முறையே a, b-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஆகும். a, b - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை, வசதிக்காக 4 செ.மீ. எனக்



படம் 110

கொண்டு a, b - அளவுகோல்களை அமைக்கலாம். x - அளவுகோலை அமைப்பதற்கு படம் 109 - இல் பயன்படுத்திய a, b - மதிப்புகளுக்குரிய குறியிணைப்புக் கோடுகளையே வரைந்து கொள்ளலாம். ஒத்த குறியிணைப்புக் கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் இழைவான வளைகோடு b - அளவுகோலுக்கு இடதுபக்கம் இருப்பதைக் காண்க. இதன் காரணம் என்ன ?

$$z' = \frac{k f_3(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$= \frac{-4x}{-x+1}$$

எனவே, x - அளவுகோலில் உள்ள புள்ளியின் z' - ஆயம் $\frac{-4x}{1-x}$ ஆகும்.

எனவே, $0 < x < 1$ எனில், z' ஒரு குறை எண்ணாக இருக்கும். எனவேதான் 0 முதல் 1 முடிய உள்ள அளவீடுகளைக் கொண்ட x - வளைகோடு b - அளவுகோலுக்கு இடது பக்கம் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 43

$a^x = x^b$ என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வுகாண ஒரு நேம வரையம் அமை. $a\,(1 - 100)$; $b\,(0 - 10)$.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$x \log a = b \log x$$

என மடக்கை அமைப்பில் எழுதிக் கொள்க. எனவே,

$$\log a + b\left[\frac{-\log x}{x}\right] = 0.$$

இச் சமன்பாடு $f_1(u) + f_2(v)\,f_3(w) = f_4(w)$

என்ற அமைப்பில் உள்ளதாகக் கருதிக் கொள்ளலாம். இங்கு $f_4(w)$ என்பது 0 ஆகும். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$y = m_1 \log a$$

$$s = m_2\, b$$

எனக் கொள்க. $m_1 = 5, m_2 = 1$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. $a = 1, b = 0$ என்ற புள்ளிகள் முறையே a, b, - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஆகும். இப் புள்ளி

களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 2 செ. மீ. எனக் கொள்க. x - அளவுகோலை அமைக்கப் பயன்படும் z', z - ஆயங்களை இப்பொழுது கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$z' = \frac{k\, f_3(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$= \frac{2\left[-\frac{\log x}{x}\right]}{-\frac{\log x}{x} + \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{-10 \log x}{x - 5 \log x}$$

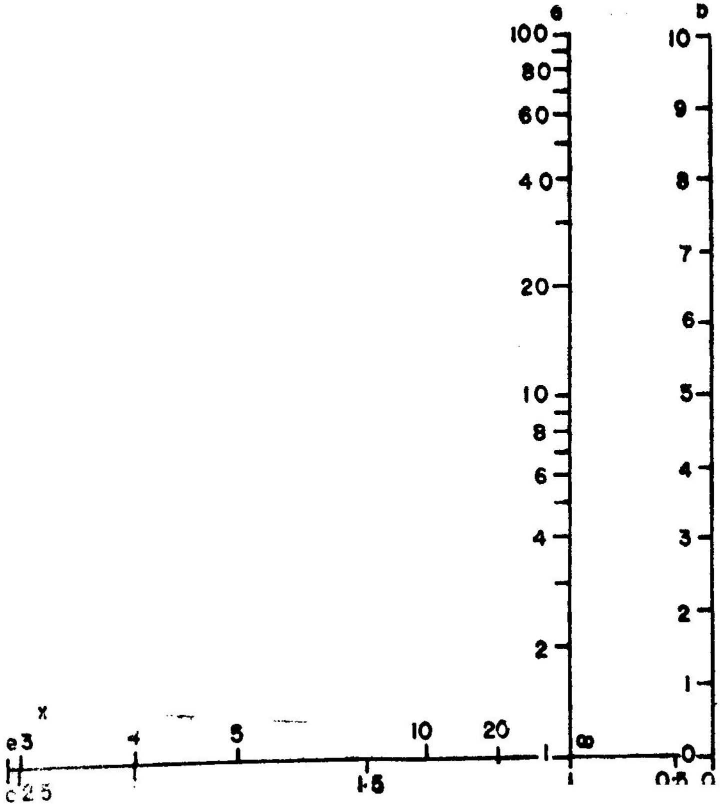
$$z = \frac{m_2\, f_4\,(w)}{f_3\,(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$= 0 \quad [\text{ஏனெனில் } f_4\,(w) = 0]$$

$z = 0$ என்பதால், x - அளவுகோலானது a, b - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் மீது அமையும் என்பது புலப்படும். அதாவது a, b - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடே x - அச்சாகும். இப்பொழுது x - இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான புள்ளிகள் இருக்கக்கூடிய குறியிணைப்புக் கோடுகளின் தொகுதியொன்றை வரைந்தால் அவை x - அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும்.

$a^x = x^b$ என்ற சமன்பாட்டை $a = x$, $b = x$ என்னும் மதிப்புகள் நிறைவு செய்யும். எனவே, a, b இவற்றின் சமமான மதிப்புகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக்கோடு x - அச்சை அதே மதிப்பில் வெட்டும் எனத் தெரிகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, $a = 1$, $b = 1$ என்ற புள்ளிகளுக்கான குறியிணைப்புக்கோடு x - அச்சை 1 என்ற அளவீட்டில் வெட்டும். $a = 2$, $b = 2$ என்ற புள்ளிகளுக்கான குறியிணைப்புக்கோடு x - அச்சை 2 என்ற அளவீட்டில் வெட்டும். இவ்வாறு x - அளவுகோலின் வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்கான குறியிணைப்புக் கோடுகளை வரைந்து x - அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையம் படம் 111 - இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

இந் நேமவரையத்தில் x - அளவுகோலின் அமைப்பைப் பற்றி இப்பொழுது ஆராயலாம். a - அளவுகோலில் குறை எண்களுக்கு அளவீடுகள் இல்லாதலால் x - அளவுகோலிலும் குறை எண்கள் இடம் பெறுது. $b = o$ என்ற புள்ளிக்குரிய x - அளவீடு o ஆகும். $a = 1$ என்ற புள்ளிக்குரிய x – அளவீடு 1 ஆகும். $b = o$, $a = 1$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள x - அச்சின் பகுதியில் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் ஓர் அளவீடுதான் உள்ளது. ஆனல், $a = 1$ என்ற புள்ளிக்கு இடது பக்கம் உள்ள x - அச்சின் பகுதியில் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் இரண்டு அளவீடுகள் உள்ளன. இதிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட a, b இவற்றின் மதிப்புகளை $a^x = x^b$ என்ற சமன்பாட்டில் பதிலீடு செய்யும்பொழுது, $x \geq 1$ என்றிருக்குமாறு x - க்கு ஏதேனும் ஒரு மதிப்புக் கிடைத்தால் $x \geq 1$ என்றிருக்குமாறு மற்றும் ஒரு மதிப்பும் கிடைக்கும் எனத் தெரிகிறது.



படம் 111

$a = 1$ என்ற புள்ளிக்கு இடது பக்கம் உள்ள x - அச்சின் பகுதியில் ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்திற்குமேல் அளவீடுகள் செய்ய முடியாது. அளவீடு செய்யப்பட்ட பகுதியின் இடது முனைக்குரிய அளவீடு e அதாவது 2. 7183 என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. இதுபோன்றே $b = 0$ என்ற புள்ளிக்கு வலது பக்கம் உள்ள x - அச்சின் பகுதியிலும் அளவீடு செய்ய முடியாது. a, b இவற்றின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக் கோடானது, x - அச்சை e என்ற அளவீட்டுக்கு இடது பக்கமோ, 0 என்ற அளவீட்டுக்கு வலது பக்கமோ வெட்டினால், வெட்டும் புள்ளிக்குரிய x - இன் மதிப்பு ஒரு சற்பனை எண்ணாகத்தான் (imaginary number) இருக்குமே ஒழிய மெய் எண்ணாக (real number) இருக்க முடியாது. இதிலிருந்து a, b இவற்றின் சில மதிப்புகளுக்கு

$$a^x = x^b$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் x - க்கு மெய் மதிப்பு இருக்க முடியாது எனத் தெரிகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, $a = 2$, $b = 1$ என்ற புள்ளிகளுக்கான குறியிணைப்புக்கோடு x அச்சை வெட்டும் புள்ளிக்கு அளவீடு ஏதும் இல்லை ஆதலால், $2^x = x$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில், x - க்கு மெய்மதிப்பு (real value) இல்லை எனத் தெரிகிறது.

இனி, x – அளவுகோலின் இடது முனைக்கு e என்ற அளவீடும் வலது முனைக்கு 0 என்ற அளவீடும் எப்படி வந்தன எனக் காணலாம்.

$$z' = \frac{-10 \log x}{x - 5 \log x}$$

பகுதி, விகுதி இரண்டையும் $-5 \log x$ - ஆல் வகுத்தால்

$$z' = \frac{2}{1 - \left(\dfrac{x}{5 \log x} \right)}$$

இங்கு $\log x$ என்பது x - இன் பொதுமடக்கை என்பதை நினைவிற் கொள்க. $0 < x < 1$ எனில் $\dfrac{x}{5 \log x} < 0$. எனவே,

$0 < z' < 2$. படம் 111 - இல் $a = 1$ என்ற புள்ளியில் $z' = 0$, $b = 0$ என்ற புள்ளியில் $z' = 2$. ஆகவே, x - அளவுகோலில் 0 முதல் 1 முடிய உள்ள அளவீடுகள் $a = 1$ என்ற புள்ளிக்கும் $b = 0$ என்ற புள்ளிக்கும் இடையில் உள்ளன. மேலும் x - இன் மதிப்பு 1 எனில் $z' = 0$. எனவேதான் x - அளவுகோலின் 1 என்ற அளவீடு $a = 1$ என்ற புள்ளியில் உள்ளது. x – இன் மதிப்பு சுழியை நோக்கிச் சென்றால் z' – இன் மதிப்பு 2 - ஐ நோக்கிச் செல்லும். எனவேதான் x - அளவுகோலின் 0 என்ற அளவீடு $b = 0$ என்ற புள்ளியில் உள்ளது.

$x > 1$ எனில் $\dfrac{x}{5 \log x} > 1$ என நிறுவலாம். எனவே, $x > 1$ எனில், z' ஒரு குறை எண்ணாகும். ஆகவே, x - அளவு கோலில், 1 - ஐ விட மிகுதியாக உள்ள அளவீடுகள், $a = 1$ என்ற புள்ளிக்கு இடதுபக்கம் உள்ளன. மேலும், $\dfrac{x}{5 \log x}$ சிறுமமாக இருக்கும் பொழுது $x = e$ என நிறுவலாம். எனவே, z' - இன் மிகக் குறைவான மதிப்புக்குரிய x - இன் மதிப்பு e ஆகும். ஆகவேதான் x - அளவுகோலின் இடது முனையில் e என்ற அளவீடு உள்ளது.

$$x = e \text{ எனில் } z' = \frac{-10 \log e}{e - 5 \log e}$$

$$= \frac{-10\,(0.4343)}{2.7183 - 5\,(0.4343)}$$

$$= -7.943$$

$x = 1$ என்ற அளவீட்டுக்கும் $x = e$ என்ற அளவீட்டுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தை அளந்து பார்த்தால் அது 7.943 செ.மீ. ஆக இருப்பது தெரியும்.

x - இன் மதிப்பு முடிவிலியை நோக்கிச் சென்றால், z' - இன் மதிப்பு சுழியை நோக்கிச் செல்லும். எனவேதான் x - அளவு கோலின் ∞ என்ற அளவீடு $a = 1$ என்ற புள்ளியில் உள்ளது.

21. இருபடிச் சமன்பாடு (Quadratic equation)

கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடு எந்த அமைப்பில் இருப்பினும், அதை $x^2 + ax + b = 0$ என்ற படித்தர அமைப்பில்

எழுதலாம். a, b இவற்றின் மதிப்புகள் மாற மாற, பல்வேறு இருபடிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும். இச் சமன்பாடுகள் யாவற்றிற்கும் தீர்வு காண ஒரு நேமவரையம் அமைத்தால் போதுமானது. இப்பொழுது a, b இவற்றின் நெடுக்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் -10 முதல் 10 முடிய எனக் கொண்டு $x^2 + ax + b = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காண ஒரு நேமவரையம் அமைக்கலாம்.

$$x^2 + ax + b = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை

$$f_1(u) + f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற அமைப்பில் இருக்குமாறு

$$b + ax = -x^2$$

என எழுதிக் கொள்க. எனவே, b, a - அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும், x-அளவுகோலை ஒரு வளைகோட்டின் மீதும் அமைத்து ஒரு நேமவரையத்தை அமைக்கலாம். b, a - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$y = m_1 b$$

$$s = m_2 a$$

எனக் கொள்க. $m_1 = 0.5$, $m_2 = 0.5$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. $b = 0, a = 0$ என்ற புள்ளிகள் முறையே b, a - அளவு கோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகள் ஆகும். இப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு கிடைக்கோடாக வருமாறு, b, a - அளவு கோல்களை இரு நிலைக்குத்துக் கோடுகளின் மீது ஒரே திசையில் செல்லுமாறு அமைக்க வேண்டும் (படம் 112). b, a - அளவு கோல்களின் இடைத்தூரத்தை வசதிக்காக 8 செ.மீ. எனக் கொள்ளலாம். b, a – அளவுகோல்களை அமைத்த பின்னர், குறியிணைப்புக் கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளை வரைந்து x-அளவுகோலை அமைக்கவும். x - அளவுகோலில் 0 முதல் 10 முடிய அளவீடு செய்து கொள்ளலாம். கொடுத்துள்ள

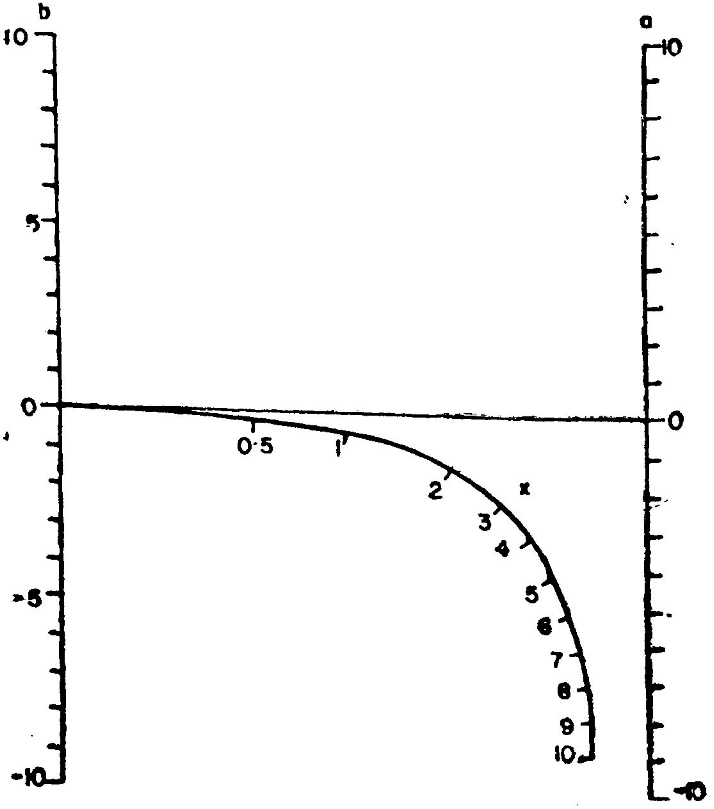
சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில், 0 முதல் 10 முடிய உள்ள x - இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு ஒத்த b, a இவற்றின் இரண்டு தொகுதி மதிப்புகளை அட்டவணை 25 - இல் உள்ளவாறு தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. ஒத்த குறியிணைப்புக்கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளைக் குறித்து இப்புள்ளிகள் வழியாக

அட்டவணை 25

x	தொகுதி I		தொகுதி II	
	b	a	b	a
0	0	0	0	— 1
1	0	— 1	1	— 2
2	0	— 2	2	— 3
3	0	— 3	3	— 4
4	0	— 4	4	— 5
5	0	— 5	5	— 6
6	0	— 6	6	— 7
7	0	— 7	7	— 8
8	0	— 8	8	— 9
9	0	— 9	9	—10
10	0	—10	10	—11

ஓர் இழைவான வளைகோடு வரைந்து அளவீடு செய்தால் x - அளவுகோல் கிடைக்கும். x - அளவுகோலை அமைத்து முடித்ததும் அதை அமைக்கப் பயன்படுத்திய குறியிணைப்புக் கோடுகளைத் துடைத்தழித்து விடலாம்.

z', z - அச்சுத்தூரங்களை அளந்து, x - அளவுகோலை அமைப்பின்,



படம் 112

$$z' = \frac{k\, f_3(w)}{f_3(w) + \left[\frac{m_2}{m_1}\right]}$$

$$= \frac{8x}{x + 1}$$

$$z = \frac{m_2\, f_4\,(w)}{f_3\,(w) + \left[\frac{m_2}{m_1}\right]}$$

$$= \frac{-\, x^{21}}{2\,(x + 1)}$$

$x > 0$ எனில், $0 < z' < 8$; $z < 0$. எனவேதான் மிகை எண்களுக்குரிய x - அளவுகோல், b, a - அளவுகோல்களுக்கிடையில், b, a - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்குக் கீழே உள்ளது. $-1 < x < 0$ எனில் z', z - ஆயங்கள் இரண்டுமே குறை எண்கள் ஆகும். எனவே, —1 முதல் 0 முடிய உள்ள அளவீடுகளுக்குரிய x - அளவுகோல், b - அளவுகோலுக்கு இடதுபக்கத்தில், b, a - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்குக் கீழே இருக்கும். $x < -1$ எனில், $z' > 8$; $z > 0$. எனவே, — 1 என்பதற்குக் குறைவாக உள்ள அளவீடுகளுக்குரிய x – அளவுகோல், a – அளவுகோலுக்கு வலது பக்கத்தில், b, a - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்கு மேலே இருக்கும்.

படம் 112 - இல் காட்டப்பட்டுள்ள நேமவரையத்திலிருந்து $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகை மூலங்களை (positive roots) மட்டுமே நேரடியாகக் காணலாம். எனினும், சமன்பாட்டுக் கொள்கையைப் (theory of equation) பயன்படுத்தி இயற் கணிதத்தின் வாயிலாகவோ அல்லது அமைக்கப்பட்ட நேம வரையத்தின் வாயிலாகவோ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் குறை மூலங்களையும் (negative roots) காணலாம். $x^2+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் (roots) காணப் படம் 112 - ஐ எப்படிப் பயன்படுத்துவது?

b, a - மதிப்புகளுக்குரிய குறியிணைப்புக்கோடு x - அளவுகோலை இரண்டு புள்ளிகளிலோ, ஒரு புள்ளியிலோ வெட்டக்கூடும். அல்லது x - அளவுகோலை வெட்டாமலும் போகலாம். குறியிணைப்புக்கோடு x - அளவுகோலுக்குத் தொடுகோடாகவும் அமையலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் இரண்டு மூலங்களும் மிகை மூலங்களாக இருந்தால்தான் குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை இரண்டு இடங்களில் வெட்டும். குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டினால் x - இன் இரண்டு மதிப்புகளையும் படத்திலிருந்து நேரடியாகக் கண்டு பிடித்து விடலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மிகை மூலமாகவும், மற்றொரு மூலம் குறை மூலமாகவும் இருந்தால்தான் குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை ஓரிடத்தில் வெட்டும். குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை ஒரு புள்ளியில்

வெட்டினால் சமன்பாட்டின் மிகைமூலத்தைப் படத்திலிருந்து நேரடியாகக் கண்டுபிடித்துவிடலாம். குறை மூலத்தைப் படத்திலிருந்து நேரடியாகக் காணமுடியாது. ஏனெனில் x - இன் மிகை மதிப்புகளுக்கே (positive values) x - அளவுகோல் அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

$x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை (sum), $-a$ ஆகும். எனவே, படத்திலிருந்து கண்டுபிடித்த மிகை மூலத்தை $-a$ என்பதிலிருந்து கழித்தால் இரண்டாவது மூலம் கிடைக்கும். $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களின் பெருக்குத்தொகை (product) b ஆகும். எனவே, படத்திலிருந்து கண்டுபிடித்த மூலத்தால், b- ஐ வகுத்தாலும் இரண்டாவது மூலம் கிடைக்கும். எனினும் இரண்டாவது மூலமான குறை மூலத்தை வரைபட வாயிலாகவும் காணலாம். ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டுக்குரிய இரு மூலங்களின் குறிகளும் (signs) மாற்றப்பட்டால், மூலங்களின் பெருக்குத் தொகை மாறாது. ஆனால், கூட்டுத் தொகை, குறியால் மாறுபடும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட b - யின் மதிப்புக்கும், கொடுக்கப்பட்ட a யின் குறிமாற்றப்பட்ட (changed in sign) மதிப்புக்கும் வரையப் பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு, x - வளைகோட்டை, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்குரிய மூலங்களின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்புகளில் வெட்டும். எனவே, படம் 112 - ஐப் பயன்படுத்தி $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறை மூலத்தைக் காணவேண்டு மெனில், கொடுக்கப்பட்ட b - யின் மதிப்புக்கும், கொடுக்கப்பட்ட a - யின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்புக்கும் குறியிணைப்புக்கோடு வரைந்து, அக்கோடு x - வளைகோட்டை வெட்டும் இடத்தில் உள்ள மதிப்பின் குறியினை மாற்றிக் கொள்ளவேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்ட a, b இவற்றின் மதிப்புகளுக்கு வரையப் பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டின் தொடுகோடாக இருந்தால், சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இரண்டும் சமமான மிகை மூலங்கள் ஆகும். தொடுபுள்ளியில் (point of contact) உள்ள மதிப்பே அந்தச் சமமான மூலம் ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட b - யின் மதிப்புக்கும், a - யின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்புக்கும் வரையப் பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டுக்குத் தொடுகோடாக இருப்பின், சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் சமமான குறை மூலங்கள் ஆகும். தொடுபுள்ளியில் உள்ள மதிப்பின் குறியை மாற்றிக் கொண்டால் அந்தச் சமமான குறை மூலம் கிடைக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட a, b இவற்றின் மதிப்புகளுக்கு வரையப் பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு, x - வளைகோட்டை வெட்டாமலேயே

சென்றால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் குறை மூலங்களாகவோ அல்லது இரண்டும் கற்பனை மூலங்களாகவோ (imaginary roots) இருக்கும். இரு மூலங்களும் குறை மூலங்களாக இருந்தால், கொடுக்கப்பட்ட b-யின் மதிப்புக்கும் a-யின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்புக்கும் வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு x-வளைகோட்டை இரண்டு இடங்களில் வெட்டும். இந்த இரண்டு இடங்களில் உள்ள மதிப்புகளின் குறிகளை மாற்றிக் கொண்டால், தேவையான குறை மூலங்கள் கிடைக்கும். கொடுக்கப்பட்ட b-யின் மதிப்பு, a-யின் குறி மாற்றப்பட்ட மதிப்பு இவைகளுக்கு வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக்கோடும் x – வளைகோட்டை வெட்டவில்லை எனில், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் கற்பனை மூலங்கள் ஆகும். கற்பனை மூலங்களைக்காண நேமவரையம் பயன்படாது. $a^2 < 4b$ எனில், $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் கற்பனை மூலங்கள் ஆகும்.

மெய் எண் கெழுக்களைக் கொண்ட சமன்பாட்டில் கற்பனை மூலங்கள் இரட்டை இரட்டையாக (pairs) வரும். எனவே, $x^2 + ax + b = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கு ஒரு கற்பனை மூலமும் ஒரு மெய் மூலமும் (real root) இருக்க முடியாது.

22. முப்படிச் சமன்பாடு (Cubic equation)

கொடுக்கப்பட்ட முப்படிச் சமன்பாடு

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

என்ற அமைப்பில் இருந்தால், இச்சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு மூலத்தையும் $-\frac{p}{3}$ குறைவுபடுத்தி (decrease) அதாவது $\frac{p}{3}$ மிகுதிப்படுத்தி (increase) இதை

$$x^3 + ax + b = 0$$

என்ற படித்தர அமைப்பில் மாற்றி அமைக்கலாம். சமன்பாட்டுக் கொள்கையைப் பற்றி அறியாதவர்களுக்கு மேற்சொன்னது சற்று புரியாமல் இருக்கலாம். எனவே, அதற்கு விளக்கம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β, γ எனில், $\alpha + \frac{p}{3}, \beta + \frac{p}{3}, \gamma + \frac{p}{3}$ என்ற மூன்றையும் மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$$x^3 + ax + b = 0$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு வரைபட வழியில் தீர்வுகாண வேண்டுமெனில், முதலில் இச் சமன்பாட்டை $x^3 + ax + b = 0$ என்ற அமைப்பில் மாற்றி அமைத்துக் கொள்வது நல்லது.

மெய் எண் கெழுக்களைக் கொண்ட சமன்பாட்டில் கற்பனை மூலங்கள் இரட்டை இரட்டையாக வரும். எனவே, ஒரு முப்படிச் சமன்பாட்டுக்கு ஒரு மெய் மூலமும் இரு கற்பனை மூலங்களும் இருக்கும். அல்லது மூன்றுமே மெய்மூலங்களாக இருக்கும்.

$4a^3 + 27b^2 > 0$ எனில் $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மெய்யாகவும் இரண்டு மூலங்கள் கற்பனையாகவும் இருக்கும். மேலும், இதில் $b < 0$ எனில், அந்த மெய்மூலம் மிகை மூலமாகவும், $b > 0$ எனில் அந்த மெய்மூலம் குறை மூலமாகவும், $b = 0$ எனில் அந்த மெய்மூலம் சுழியாகவும் இருக்கும். $4a^3 + 27b^2 \leq 0$ எனில் $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்களும் மெய்யாக இருக்கும். குறிப்பாக $4a^3 + 27b^2 = 0$ எனில், மூன்று மெய்மூலங்களில் இரண்டு மூலங்கள் சமமாகும்.

இப்பொழுது $x^3 + ax + b = 0$ என்ற முப்படிச் சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வுகாண ஒரு நேமவரையம் அமைக்கலாம். a, b - இவற்றின் நெடுக்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் — 20 முதல் 20 முடிய எனக் கொள்ளலாம். கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$b + ax = -x^3$$

என்ற அமைப்பில் எழுதிக் கொள்க. எனவே, b, a - அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும், x - அளவுகோலை ஒரு வளைகோட்டின் மீதும் அமைக்கவேண்டும். b, a - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$y = m_1 b$$

$$s = m_2 a$$

எனக் கொள்க. $m_1 = 0.25$, $m_2 = 0.25$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. $b = 0$, $a = 0$ என்ற புள்ளிகள் முறையே b, a - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகள் ஆகும். இப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு ஒரு கிடைக்கோடாக வருமாறு b, a - அளவுகோல்களை இரு நிலைக்குத்துக் கோடுகளின்மீது ஒரே திசையில் செல்லுமாறு அமைக்க வேண்டும் (படம் 113). b, a -

அளவுகோல்களின் இடைத்தூரத்தை வசதிக்காக 8 செ. மீ. எனக் கொள்ளலாம். b, a - அளவுகோல்களை அமைத்தபின்னர், குறியிணைப்புக்கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளை வரைந்து x - அளவுகோலை அமைக்கவும். x - அளவுகோலில் 0 முதல் 5 முடிய அளவீடு செய்து கொள்ளலாம். கொடுத்துள்ள சமன் பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் 0 முதல் 5 முடிய உள்ள x - இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு ஒத்த b, a இவற்றின் இரண்டு தொகுதி மதிப்புகளை அட்டவணை 26 - இல் உள்ளவாறு தேர்ந் தெடுத்துக் கொள்க. ஒத்த குறியிணைப்புக்கோடுகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளைக் குறித்து இப்புள்ளிகள் வழியாக ஓர் இழைவான வளைகோடு வரைந்து அளவீடு செய்தால் x - அளவுகோல் கிடைக்கும். பின்னர் 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5 என்ற

அட்டவணை 26

x	தொகுதி I		தொகுதி II	
	b	a	b	a
0	0	0	0	20
1	0	— 1	— 20	19
2	0	— 4	— 20	6
3	0	— 9	— 18	— 3
4	0	— 16	— 20	— 11
5	0	— 25	— 20	— 21

அளவீடுகளை x - அளவுகோலின் மீது செய்துகொள்ளலாம். இதற்கு $b = 0$ என்ற புள்ளியை முறையே a - அளவுகோலின் — 0.25, — 2.25, — 6.25, — 12.25, — 20.25 என்ற அளவீடு களுக்குரிய புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடுகளை வரையவேண்டும். இக் கோடுகள் x - வளைகோட்டைத் தேவை யான அளவீடுகளில் வெட்டும். x - அளவுகோலை அமைத்து முடித்ததும் அதை அமைக்கப் பயன்படுத்திய குறியிணைப்புக் கோடுகளைத் துடைத்தழித்து விடலாம்.

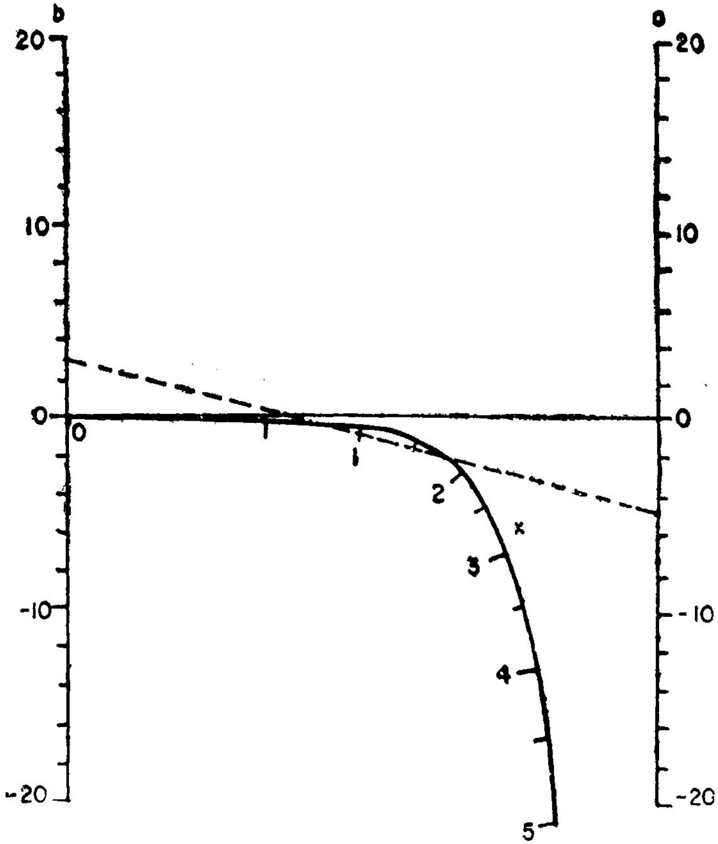
z', z - அச்சுத் தூரங்களை அளந்து x - அளவுகோலை அமைப்பின்

$$z' = \frac{k f_3 (w)}{f_3 (w) + \left[\frac{m_2}{m_1}\right]}$$

$$= \frac{8 x}{x + 1}$$

$$z = \frac{m_2 f_4 (w)}{f_3 (w) + \frac{m_2}{m_1}}$$

$$= \frac{- x^3}{4 (x + 1)}$$



படம் 113

$x > 0$ எனில், $0 < z' < 8$; $z < 0$. எனவேதான் மிகை எண்ணிய x - அளவுகோல், b, a - அளவுகோல்களுக்கிடையில்,

b, a - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்குக் கீழே உள்ளது. $-1 < x < 0$ எனில் $z' < 0$; $z > 0$. எனவே -1 முதல் 0 முடிய உள்ள அளவீடுகளுக்குரிய x - அளவுகோல், b - அளவுகோலுக்கு இடது பக்கத்தில், b, a - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோட்டுக்கு மேலே இருக்கும். $x < -1$ எனில் $z' > 8$, $z < 0$. எனவே, -1 என்பதற்குக் குறைவாக உள்ள அளவீடுகளுக்குரிய x - அளவுகோல், a - அளவுகோலுக்கு வலது பக்கத்தில், b, a - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டுக்குக் கீழே இருக்கும்.

படம் 113-இல் காட்டப்பட்டுள்ள நேமவரையத்திலிருந்து $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகை மூலங்களை மட்டுமே நேரடியாகக் காணலாம். எனினும், சமன்பாட்டுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி இயற்கணித வாயிலாகவோ அல்லது அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்தின் வாயிலாகவோ, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் குறைமூலங்களையும் காணலாம். $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணப் படம் 113-ஐ எப்படிப் பயன்படுத்துவது?

$x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை 0 ஆகும். எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன் பாட்டின் மூலங்கள் மூன்றும் மிகை மூலங்களாக இருக்க வாய்ப் பில்லை. ஆகவே b, a - மதிப்புகளுக்குரிய குறியிணைப்புக்கோடு x - அளவுகோலை மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டாது. இக் குறியிணைப்புக்கோடு x - அளவுகோலை இரண்டு புள்ளிகளிலோ ஒரு புள்ளியிலோ வெட்டக்கூடும். அல்லது x - அளவுகோலை வெட்டாமலும் போகலாம். குறிணையிப்புக்கோடு x - அளவு கோலுக்குத் தொடுகோடாகவும் அமையலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்குரிய மூன்று மூலங்களில், ஏதேனும் இரண்டு மிகை மூலங்களாக இருந்தால்தான், குறி யிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை இரண்டு இடங்களில் வெட்டும். குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டினால் கொடுக்கப்பட்ட முப்படிச் சமன் பாட்டின் மிகை மூலங்கள் இரண்டையும் படத்திலிருந்து நேரடியாகக் கண்டுபிடித்து விடலாம். $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை 0 ஆதலால் மூன்றாவது மூலம் குறை மூலமாகவே இருக்கும். கண்டுபிடித்த இரண்டு மூலங்களின் குறியை மாற்றிக் கூட்டினால் மூன்றாவது

மூலமான குறை மூலம் கிடைக்கும். இக்குறை மூலத்தை வரைபட வாயிலாகவும் காண முடியும்.

$x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய மூலங்களின் குறிகளை மாற்றி, அமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^3 + ax - b = 0$ ஆகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட a - யின் மதிப்புக்கும், b - யின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்புக்கும் வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக் கோடு, x - வளைகோட்டைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக் குரிய மூலங்களின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்புகளில் வெட்டும். எனவே, படம் 113 - ஐப் பயன்படுத்தி $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறைமூலத்தைக் காணவேண்டுமெனில், கொடுக்கப்பட்ட a - யின் மதிப்புக்கும் b - யின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்புக்கும் குறியிணைப்புக்கோடு வரைந்து, அக்கோடு x - வளை கோட்டை வெட்டும் இடத்தில் உள்ள மதிப்பின் குறியினை மாற்றிக்கொள்ள வேண்டும்.

கொடுக்கப்பட்ட a, b இவற்றின் மதிப்புகளுக்கு வரையப் பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டின் தொடுகோடாக இருந்தால், இரண்டு மூலங்கள் சமமான மிகை மூலங்களாகவும், மூன்றுவது மூலம் குறை மூலமாகவும் இருக்கும். குறை மூலத்தைக் காணும் முறை முன்பே விளக்கப்பட்டுள்ளது.

குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை ஒரு புள்ளியில் வெட்டினுல் கொடுக்கப்பட்ட முப்படிச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலத்தை நேரடியாகக் காணலாம். இம் மூலம் மிகை மூலமாகும். மற்ற மூலங்கள் இரண்டும் குறை மூலங்களாகவோ அல்லது இரண்டும் கற்பனை மூலங்களாகவோ இருக்கும். இரு மூலங்களும் குறை மூலங்களாக இருந்தால், கொடுக்கப்பட்ட a- யின் மதிப்புக்கும் b - யின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்புக்கும் வரையப் பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு x – வளைகோட்டை இரண்டு இடங்களில் வெட்டும். இந்த இரண்டு இடங்களில் உள்ள மதிப்புகளின் குறிகளை மாற்றிக் கொண்டால் தேவையான குறை மூலங்கள் கிடைக்கும். இரண்டு குறை மூலங்களும் சமமாக இருப்பின், மேற்கண்டவாறு வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டின் தொடுகோடாக அமையும். இரு மூலங்களும் கற்பனை மூலங்களாக இருந்தால் கொடுக்கப்பட்ட a -யின் மதிப்புக்கும் b - யின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்புக்கும் வரையப் பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை வெட்டாது.

கொடுக்கப்பட்ட a, b - மதிப்புகளுக்கு வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை வெட்டாமலேயே

சென்றால் சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்களில் ஒன்று குறை மூலமாகவும் மற்ற இரண்டு கற்பனை மூலங்களாகவும் இருக்கும். குறை மூலத்தைக் காணும் முறை முன்பே விளக்கப்பட்டுள்ளது. கற்பனை மூலங்களைக் காண நேமவரையம் பயன்படாது.

இனி, $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காணப் படம் 113-ஐ எப்படிப் பயன்படுத்துவது எனப் பார்க்கலாம். முதலில் இச்சமன்பாட்டின் ஒவ்வொரு மூலத்தையும் $-\frac{p}{3}$ குறைவுபடுத்தி அதாவது $\frac{p}{3}$ மிகுதிப்படுத்தி $x^3 + ax + b = 0$ என்ற அமைப்பில் மாற்றி அமைத்துக் கொள்ள வேண்டும். பின்னர் படத்தின் உதவியால் $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய மூலங்களைக் கண்டுபிடித்து, ஒவ்வொரு மூலத்திலிருந்தும் $\frac{p}{3}$- ஐக் கழித்தால் $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $x^3 + 6x^2 + 7x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காணலாம். இச் சமன்பாட்டின் மூன்று மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை -6 ஆகும். எனவே, ஒவ்வொரு மூலத்தையும் $-\frac{6}{3}$ அதாவது -2 குறைவுபடுத்தினால் $x^3 + ax + b = 0$ என்ற அமைப்பில் சமன்பாடு மாறும். ஒவ்வொரு மூலத்தையும் -2 குறைவுபடுத்தி மாற்றி அமைக்கப் பட்ட சமன்பாடு

$$(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 7(x - 2) + 1 = 0$$

விரித்தெழுதிச் சுருக்க

$$x^3 - 5x + 3 = 0$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டைத் தொகுப்பு வகுத்தல் முறையாலும் (synthetic divison method) காணலாம். இவைபற்றிய விவரங்கள் வேண்டுமாயின் இயற்கணித நூல்களில் சமன்பாட்டுக் கொள்கை பற்றிய அதிகாரத்தில் படித்து அறிந்து கொள்க. $x^3 - 5x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாடு $x^3 + ax + b = 0$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது. இங்கு a, b இவற்றின் மதிப்புகள் முறையே $-5, 3$ ஆகும். $a = -5, b = 3$ என்ற புள்ளிகளுக்கு வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக்கோடு x - வளைகோட்டை 0.65, 1.85 என்ற இரண்டு அளவீடுகளில் வெட்டுகிறது (படம் 113). எனவே, $x^3 - 5x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு 0.65, 1.85 என்பன இரண்டு மூலங்கள் ஆகும். மூன்று மூலங்களின் கூடுதல் 0

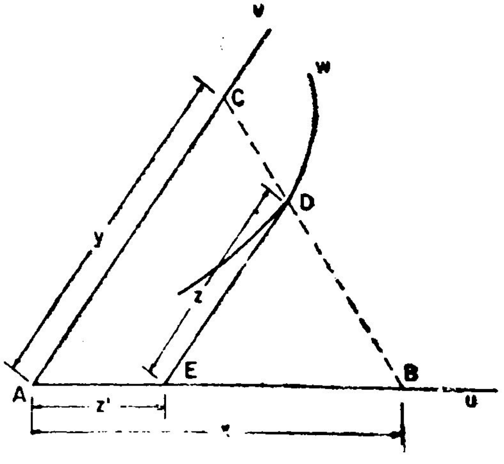
ஆதலால், மூன்ருவது மூலம் — 2.5 ஆகும். $a = -5, b = -3$ என்ற புள்ளிகளுக்குரிய குறியிலைப்புக்கோடு வரைந்து இக்கோடு x - வளைகோட்டை வெட்டுமிடத்தில் உள்ள மதிப்பின் குறியை மாற்றினலும் — 2.5 என்ற மூன்ருவது மூலம் கிடைக்கும். $x^3 - 5x + 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களான 0.65, 1.85, — 2.5 ஒவ்வொன்றுடனும் —2- ஐக் கூட்டக் கிடைக்கும் — 1.35, — 0.15, — 4.5 ஆகிய மூன்றுமே $x^3 + 6x^2 + 7x + 1 = 0$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். நேம வரையம் ஒரு வரைபட முறை ஆதலால் கண்டுபிடித்த மூலங்கள் ஓரளவே துல்லியமாக இருக்கும்.

23. $\dfrac{1}{f_1(u)} + \dfrac{f_4(w)}{f_2(v)} = \dfrac{1}{f_3(w)}$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

இச் சமன்பாட்டுக்குப் படம் 114 - இல் காட்டியபடி இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோடுகளின்மீது u, v - அளவுகோல்களை யும், ஒரு வளைகோட்டின் மீது w - அளவுகோலையும் அமைத்து நேமவரையம் அமைக்கலாம். u, v - அளவுகோல்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியானது u, v - அளவுகோல்கள் இரண்டுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாக இருக்கவேண்டும். u, v- அளவுகோல் களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$x = m_1 f_1(u)$$
$$y = m_2 f_2(v)$$

எனக் கொள்க. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w - மதிப்புகள் ஒரே நேர்



படம் 114

கோட்டில் அமையவேண்டுமெனில் w - அளவுகோலை எப்படி அமைப்பதெனக் காணலாம். u, v - மதிப்புகளுக்கு வரையப் பட்ட BC என்ற குறியிணைப்புக் கோடு w - அளவுகோலை D என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். u, v - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியை A என்க. AB - ஐ E என்ற புள்ளியில் வெட்டுமாறு D வழியாக AC - க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைக. AE, ED என்ற தூரங்களை முறையே z', z எனக் கொள்க. படம் 114 - இல் ABC, EBD என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களி லிருந்து

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{ED}$$

$AB = x$, $AC = y$ ஆதலால்

$$\frac{x}{y} = \frac{x - z'}{z}$$

குறுக்குப் பெருக்கிப் புறமாற்றம் செய்ய

$$yz' + xz = xy$$

xyz' ஆல் வகுக்க

$$\frac{1}{x} + \frac{z}{yz'} = \frac{1}{z'}$$

x, y இவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$\frac{1}{m_1 f_1(u)} + \frac{z}{m_2 f_2(v) z'} = \frac{1}{z'}$$

m_1 ஆல் பெருக்க

$$\frac{1}{f_1(u)} + \left(\frac{m_1 z}{m_2 z'}\right) \frac{1}{f_2(v)} = \frac{m_1}{z'}$$

இச் சமன்பாடு

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{f_4(w)}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்,

$$f_4(w) = \frac{m_1 z}{m_2 z'} \quad \dots \quad (1)$$

$$f_3(w) = \frac{z'}{m_1} \quad \dots \quad (2)$$

(2) - இல் இருந்து

$$z' = m_1 f_3 (w)$$

(1) - இல் z' - இன் மதிப்பைப் பதிலிட்டுக் குறுக்குப் பெருக்க

$$z = m_2 f_3 (w) f_4 (w)$$

எனவே, w - அளவுகோலை அமைக்க, w - வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான z', z - மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு அட்டவணைப் படுத்திக் கொள்ளவேண்டும். z' - ஆயத்தை u, v - அளவுகோல் களின் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து u - அளவுகோல் செல்லும் திசையிலும், z - ஆயத்தை u - அளவுகோலுக்குரிய நேர் கோட்டிலிருந்து v - அளவுகோல் செல்லும் திசையிலும் அளக்க வேண்டும்.

குறிப்பு

1. $f_4 (w) = 1$ எனில்,

$$z' = m_1 f_3 (w)$$

$$z = m_2 f_3 (w)$$

இதே அடிப்படையில்தான்

$$\frac{1}{f_1 (u)} + \frac{1}{f_2 (v)} = \frac{1}{f_3 (w)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு அதிகாரம் ஆறில் நேமவரையம் அமைக்கப்பட்டது என்பதைக் காணலாம்.

2. $$\frac{1}{f_1 (u)} + \frac{f_4 (w)}{f_2 (v)} = \frac{1}{f_3 (w)}$$

என்ற சமன்பாட்டில் $f_3 (w) = 1$ எனில்

$$\frac{1}{f_1 (u)} + \frac{f_4 (w)}{f_2 (v)} = 1$$

என்ற சிறப்பு வகையான சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இவ் வகைச் சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில் $z' = m_1$ என்பதால் w - அளவுகோலானது v - அளவு கோலுக்கு இணையான நேர்கோட்டின்மீது அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 44

$\frac{1}{u} + \frac{3 w^2}{2 v^2} = \frac{1}{2 w}$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. $u (0-10)$; $v (0-20)$; $w (0-5)$.

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{f_4(w)}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. எனவே, u, v - அளவுகோல்களை இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோடுகளின்மீதும், w - அளவு கோலை ஒரு வளைகோட்டின்மீதும் அமைக்கவேண்டும். u, v - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$x = m_1 u$$
$$y = m_2 (2 v^2)$$

எனக் கொள்க. u - வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (10 - 0) = 10 m_1$$

$m_1 = 0.8$ எனக் கொள்க. v - யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = 2m_2 (20^2 - 0) = 800 m_2$$

$m_2 = 0.01$ எனக் கொள்க. எனவே, u, v - அளவுகோல்களின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$x = 0.8 u$$
$$y = 0.02 v^2$$

ஆகும். w - அளவுகோலை அமைக்க, w – வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான z', z - ஆயங்களை

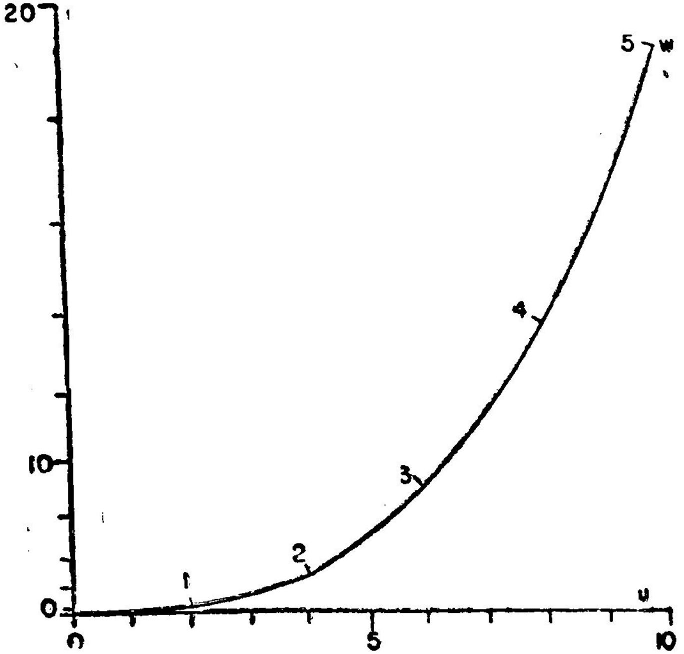
$$z' = m_1 f_3 (w)$$
$$\text{அதாவது, } z' = 1.6 w$$
$$z = m_2 f_3 (w) f_4 (w)$$
$$\text{அதாவது, } z = 0.06 w^3$$

என்ற வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடவேண்டும் (அட்டவணை 27). u, v - அளவுகோல்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே இந்த இரண்டு அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகள் ஆகும். இப்புள்ளியிலிருந்துதான் z', z - அச்சுத்தூரங்களை அளக்க வேண்டும். z' - அச்சுத் தூரத்தை u - அளவுகோல் செல்லும் திசையிலும், z அச்சுத் தூரத்தை v - அளவுகோல் செல்லும் திசையிலும் அளக்கவேண்டும். வசதிக்காக, u, v - அளவு கோல்களை, செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் இரண்டு நேர் கோடுகளின் மீது அமைத்துக்கொள்க (படம் 115). u, v -

அளவுகோல்களை அமைத்த பிறகு அட்டவணை 27 - இல் உள்ளபடி, z', z - அச்சுத் தூரங்களை அளந்து w - அளவுகோலுக்குரிய

அட்டவணை 27

w	$z' = 1.6\,w$	$z = 0.06\,w^3$
0	0	0
1	1.6	0.06
2	3.2	0.48
3	4.8	1.62
4	6.4	3.84
5	8.0	7.50



படம் 115

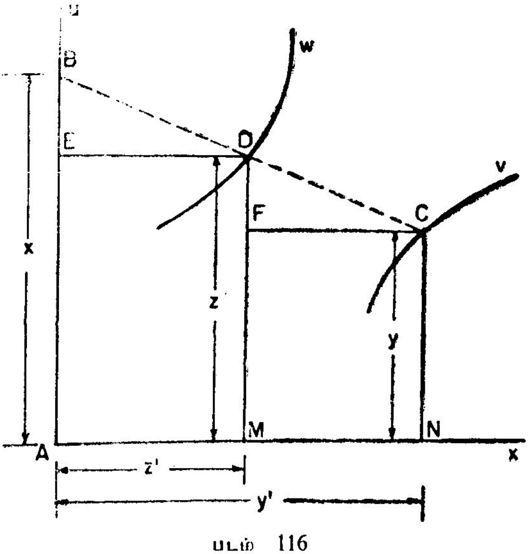
புள்ளிகளைக் குறிக்கவேண்டும். இவ்வாறு குறித்த புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு வரைந்தால் அதுவே w-அச்சாகும். பிறகு, குறித்த புள்ளிகளுக்குரிய அளவீடுகளை எழுதினால் w - அளவுகோல் கிடைக்கும்.

24. $f_1(u) = \dfrac{f_2(v)f_3(w) - f_4(v)f_5(w)}{f_2(v) - f_5(w)}$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

இச் சமன்பாட்டுக்குப் படம் 116 - இல் காட்டியபடி u - அளவுகோலை ஒரு நேர்கோட்டின் மீதும், v, w - அளவுகோல்களை இரண்டு வளைகோடுகளின் மீதும் அமைத்து நேமவரையம் அமைக்கலாம். u - அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளியை A என்க. u – அளவுகோலின் அளவுகோல் சமன்பாட்டை

$$x = m_1 f_1(u)$$

எனக் கொள்க. சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w – மதிப்புகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைய வேண்டுமெனில், v, w - அளவுகோல்களை எவ்வாறு அமைக்க



படம் 116

வேண்டும்? வசதிக்காக u - அளவுகோலை ஒரு நிலைகுத்துக் கோட்டின் மீது அமைத்துக் கொள்க. A வழியாக AX என்ற ஒரு நேர்கோடு வரைக. வசதிக்காக இக் கோட்டைக் கிடைக் கோடாக எடுத்துக் கொள்க.

u, v - மதிப்புகளை இணைக்கும் BC என்ற குறியிணைப்புக்கோடு w - அளவுகோலை D என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். D, C என்ற புள்ளிகள் வழியாக AB - க்கு இணையாக நேர்கோடுகள் வரைக. இக் கோடுகள் AX - ஐ முறையே M, N என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும். பின்னர் E, F என்ற புள்ளிகள் முறையே AB, MD இவற்றின் மீது இருக்குமாறு D, C வழியாக AX - க்கு இணையாகக் கோடுகள் வரைக. $AM = z'$, $MD = z$, $AN = y'$, $NC = y$ எனக் கொள்க. படம் 116 - இல், $\triangle DEB$, $\triangle CFD$ இரண்டும் வடிவொத்தன.

$$\text{எனவே,}\quad \frac{EB}{FD} = \frac{ED}{FC}$$

$$\text{அதாவது}\quad \frac{x - z}{z - y} = \frac{z'}{y' - z'}$$

$$\text{அதாவது}\quad x - z = \frac{zz' - yz'}{y' - z'}$$

புறமாற்றம் செய்து சுருக்க

$$x = \frac{y'z - yz'}{y' - z'}$$

இதில் x-இன் மதிப்பைப் பதிலிட

$$m_1 f_1 (u) = \frac{y'z - yz'}{y' - z'}$$

இச் சமன்பாடு

$$f_1 (u) = \frac{f_2 (v) f_3 (w) - f_4 (v) f_5 (w)}{f_2 (v) - f_5 (w)}$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்க வேண்டுமெனில்,

$$y' = m_2 f_2 (v)$$
$$z = m_1 f_3 (w)$$
$$y = m_1 f_4 (v)$$
$$z' = m_2 f_5 (w)$$

எனவே, v - அளவுகோலை அமைக்க

$$y' = m_2 f_2 (v)$$
$$y = m_1 f_4 (v)$$

என்ற வாய்பாடுகளையும், w - அளவுகோலை அமைக்க

$$z' = m_2 f_5 (w)$$

$$z = m_1 f_3 (w)$$

என்ற வாய்பாடுகளையும் பயன்படுத்த வேண்டும். y, z - அச்சுத் தூரங்களை u - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து u - அளவுகோல் செல்லும் திசையிலும், y', z' - அச்சுத் தூரங்களை u - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியிலிருந்து, வசதிக்கேற்றவாறு ஏதாவது ஒரு திசையிலும் அளந்து கொள்ள வேண்டும். y', z'- அச்சுத்தூரங்கள் இரண்டையும் ஒரே திசையில் அளக்கவேண்டும் என்பதை நினைவிற் கொள்க. வசதிக்காக y, z - ஆயங்களுக்குரிய அச்சை நிலைக்குத்துக் கோடாகவும் y', z' - ஆயங்களுக்குரிய அச்சைக் கிடைக் கோடாகவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 45

$$s = \frac{h_0 - h_1}{h_0 + h_1}$$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. இங்கு

s = ரப்பரின் (rubber) மென்மைக் கூறு (softness factor), (0.1—0.65).

h_0 = சோதனைத் துண்டின் (test piece) தொடக்க உயரம், (1.0—1.4) செ. மீ.

h_1 = 30 நொடி இறுக்கத்திற்குப் (compression) பின் உயரம், (0.2 - 1) செ. மீ.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$s = \frac{h_0 (1) - (-1)(-h_1)}{h_0 - (-h_1)}$$

என எழுதிக் கொள்க. இது

$$f_1 (u) = \frac{f_2 (v) f_3 (w) - f_4 (v) f_5 (w)}{f_2 (v) - f_5 (w)}$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது. s - அளவுகோலின் அளவுகோல் சமன்பாட்டை

$$x = m_1 s$$

எனக்கொள்க. h_0 - அளவுகோலை அமைக்க y', y - ஆயங்களைப் பயன்படுத்தவேண்டும். இங்கு

$$y' = m_2 h_0$$

$$y = m_1(-1)$$

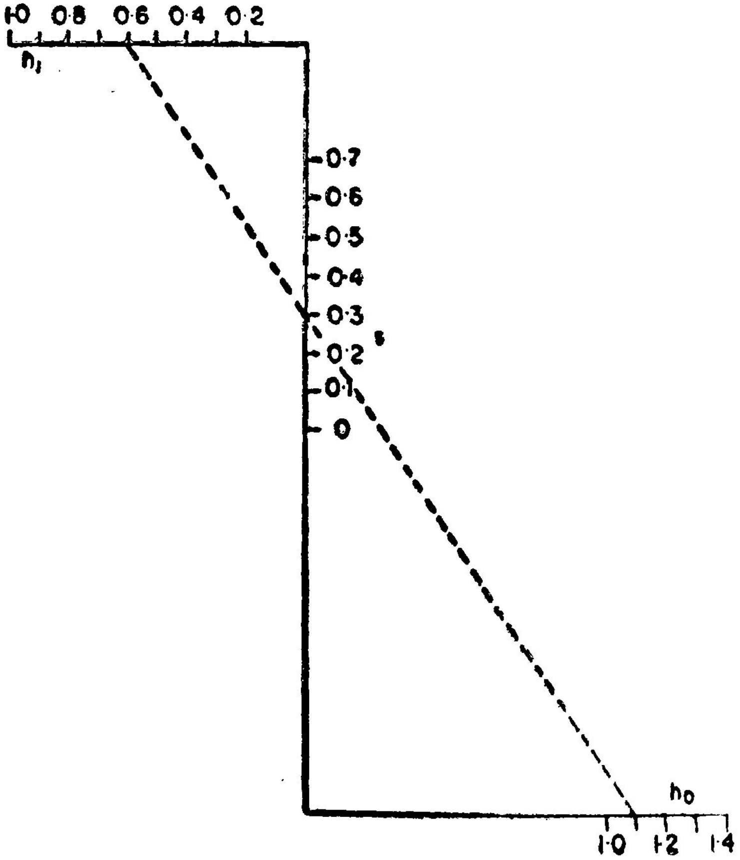
அதாவது, $y = -m_1$

h_1 - அளவுகோலை அமைக்க z', z - ஆயங்களைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இங்கு

$$z' = m_2(-h_1)$$

அதாவது, $z' = -m_2 h_1$

$$z = m_1$$



படம் 117

$m_1 = 5$, $m_2 = 4$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே,

s - அளவுகோலுக்கு $x = 5s$

h_0 - அளவுகோலுக்கு $y' = 4h_0$

$y = -5$

h_1 - அளவுகோலுக்கு $z' = -4h_1$

$z = 5$

வசதிக்காக s - அளவுகோலை நிலைக்குத்துக் கோட்டின்மீது அமைத்துக் கொள்க (படம் 117). y', z' - ஆயங்களுக்குரிய அச்சைக் கிடைக்கோடாக எடுத்துக் கொள்க. h_0 - அளவுகோலில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் y - ஆயம் -5 என்பதால், h_0 - அளவுகோல் ஒரு கிடைக்கோட்டின்மீது அமைந்துள்ளது. இதேபோன்று h_1 - அளவுகோலும் ஒரு கிடைக்கோட்டின்மீது அமைவதைக் காணலாம். y', z' - அச்சுத் தூரங்களை அளந்து முறையே h_0, h_1 - அளவுகோல்களை அமைக்கவேண்டும். $h_0 = 1.1$, $h_1 = 0.6$ எனில், s - இன் மதிப்பு ஏறத்தாழ 0.3 என அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்திலிருந்து காணலாம்.

அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் Z - விளக்கப்படத்திற்குரிய இரு இணையளவுகோல்களும் ஒரு குறுக்குக் கோட்டு அளவுகோலும் இருப்பதைக் காண்க. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$\frac{h_0}{h_1} = \frac{1+s}{1-s}$$

என மாற்றியமைத்துக் கொண்டால் Z - விளக்கப்படத்திற்குரிய

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w)$$

என்ற வகைச் சமன்பாடு கிடைப்பதே இதன் காரணம் ஆகும்.

தேவையான நேமவரையத்தை Z - விளக்கப்பட முறையிலும் அமைக்கலாம். இம் முறையில் h_0, h_1 - அளவுகோல்களை எளிதில் அமைத்துவிடலாம். ஆனால், s - அளவுகோலை அமைக்க h_0 - அச்சின்மீது s - இன் துணையளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். பின்னர் h_1 - அச்சின்மீது கணக்கீட்டிற்கேற்ப நிலைப்புள்ளி ஒன்றைக் குறித்து, அதன் வழியாகத் துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு நேர்கோடுகள் வரையவேண்டும். மேலும், s - இன் துணையளவுகோலை அமைப்பதற்கே கணக்கீடுகள் மிகுதி. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு Z - விளக்கப் பட முறையைவிடப் படம் 117 - இல் அமைக்கப்பட்ட முறையே எளிதாகும்.

25. நேர்கோட்டு ஆய விளக்கப் படங்கள் (Line co-ordinate charts)

u, v, w என்னும் மூன்று மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு ஒரு சமன்பாட்டின் அமைப்பில் இல்லாதவாறு, அம் மூன்று மாறிகளின் ஒத்த மதிப்புகள் அட்டவணை அமைப்பில் கிடைக்கக்கூடும். இந் நிலையில், u, v, w என்ற மூன்றுக்கும் உள்ள தொடர்பினைக் காட்ட நேமவரையம் அமைக்க முடியுமா எனப் பார்க்கலாம்.

மூன்றுவது மாறியின் மதிப்புகள் எல்லாவற்றிற்கும் மற்ற இரண்டு மாறிகளின் சார்புகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருக்குமெனில், மூன்று மாறிகளுக்குமிடையே உள்ள தொடர்பினைக் காட்ட ஒரு நேமவரையம் அமைக்கலாம். u, v என்னும் மாறிகளின் சார்புகளை $f_1(u)$, $f_2(v)$ என்னும் இச் சார்புகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருப்பதாகவும் கொள்க. எனவே,

$$f_1(u) = a + b f_2(v)$$

இச் சமன்பாடு u, v, w என்ற மூன்று மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பைக் குறிப்பதால் a, b என்பன பொதுவாக w-வின் சார்புகளாக இருக்கும். ஆகவே,

$$f_1(u) = a + b f_2(v)$$

என்ற சமன்பாடு

$$f_1(u) - f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும். இச் சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில், u, v, - அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்க வேண்டும். w - அளவுகோல் பொதுவாக ஒரு வளைகோட்டின் மீது அமையும்.

$f_3(w)$, $f_4(w)$ என்ற சார்புகள் தெரியாது. ஆனல், w - வின் குறிப்பிட்ட ஒருசில மதிப்புகளுக்குரிய $f_3(w)$, $f_4(w)$ இவற்றின் மதிப்புகள் மட்டுமே அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். எனவே, அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட w - வின் மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே w - அளவுகோலில் அளவீடு செய்யமுடியும். கொடுக்கப்பட்ட w - வின் மதிப்புகளுக்கான புள்ளிகளை நேமவரையத்தில் குறிப்பதற்கேற்ப, குறியிணைப்புக் கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளுக்குரிய u, v - மதிப்புகளை, கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையிலிருந்து எளிதில் கண்டுபிடித்துக் கொள்ளலாம். இவ்வாறு மீண்டும் வரும் மாறியான w - வின் சார்புகள் எவை எனத் தெரியாத போதும் மற்ற இரண்டு மாறிகளின் சார்புகளுக்கிடையே நேர்

கோட்டுத் தொடர்பு இருக்கும்பொழுது, இரண்டு தொகுதி குறியிணைப்புக் கோடுகளின் உதவியால் w - அளவுகோலை அமைத்து நேமவரையம் அமைக்கலாம். இந்தச் சிறப்பு வகையான நேமவரையத்திற்கு நேர் கோட்டு ஆய விளக்கப்படம் (line co - ordinate chart) எனப் பெயர். ஒரு குறியிணைப்புக் கோட்டுக்குரிய u, v - மதிப்புகளை அந்த நேர்கோட்டின் ஆயங்கள் எனலாம். வளை கோட்டு அளவுகோலுக்குரிய சார்புகள் கொடுக்கப்படவில்லை எனினும், குறியிணைப்புக் கோடுகளின் உதவியால் நேமவரையத்தை அமைத்து முடிப்பதால் இந் நேமவரையத்தை நேர் கோட்டு ஆய விளக்கப்படம் என அழைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 46

துத்தநாகச் சல்ஃபேட்டின் (zinc sulphate) செறிவுகள் எல்லாவற்றிற்கும், துத்தநாகக் குளோரைடு (zinc chloride) - துத்தநாகச் சல்ஃபேட்டு - நீர் என்ற முத்தனிம அமைப்புக்கு (ternary system), அடர்த்தியானது (density), (1.0 முதல் 1.5 கி./மி.லி. முடிய) துத்தநாகக் குளோரைடு எடையின் நூற்று வீதத்துடன் (0 முதல் 20 முடிய) நேர்கோட்டுத் தொடர்புடையது. பின் வரும் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி இதற்கு நேர்கோட்டு ஆய விளக்கப்படம் அமை.

துத்தநாகக் குளோரைடு எடையின் நூற்றுவீதத்தை v என்ற எழுத்தாலும் அடர்த்தியை u என்ற எழுத்தாலும் குறித்துக் கொள்க. u - ஆனது v - யுடன் நேர்கோட்டுத் தொடர்புடையது ஆதலால் $u = a+b\,v$ ஆகும். u, v - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே,

$$x = m_1 u$$

$$y = m_2 v$$

எனக் கொள்க. u -வின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (1.5 - 1.0)$$

$$= 0.5\, m_1$$

$m_1 = 20$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. v - யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 (20 - 0)$$

$$= 20\, m_2$$

துத்தநாகச் சல்ஃபேட்டு எடையின் நூற்றுவீதம்	துத்தநாகக் குளோரைடு எடையின் நூற்றுவீதம்	அடர்த்தி கி./மி.லி.
0	0	0.997
	20	1.185
5	0	1.050
	20	1.232
10	0	1.105
	20	1.290
15	0	1.166
	20	1.353
20	0	1.230
	20	1.419
25	0	1.297
	10	1.400
28	0	1.338
	10	1.448

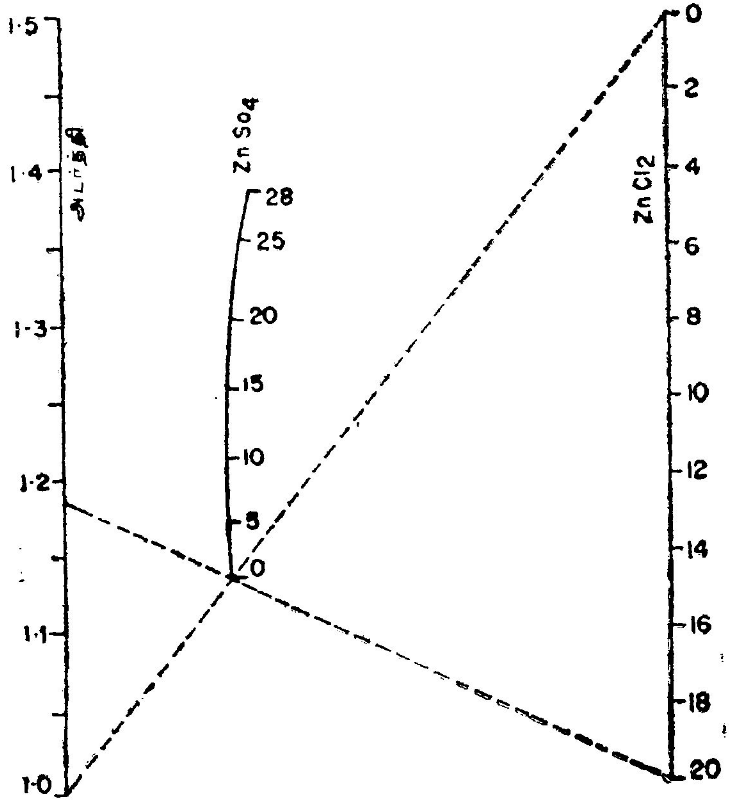
$m_2 = 0.5$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே u, v - அளவு கோல்களின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள் முறையே,

$$x = 20\,u$$

$$y = 0.5\,v$$

ஆகும். படம் 118-இல் காட்டியபடி u, v-அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும். u, v-அளவுகோல்களின் இடைத் தூரத்தை எதுவாக வேண்டுமானாலும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

துத்தநாகச் சல்ஃபேட்டு எடையின் நூற்றுவீதத்தை w என்ற எழுத்தால் குறித்துக் கொள்க. அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட w-வின் மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளைப் படத்தில் குறிக்கவேண்டும்.



படம் 118

$w = 0$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கும் விதம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இப்புள்ளிக்குரிய u, v-மதிப்புகளைக் கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் காணலாம். எனவே, $v = 0$, $u = 0.997$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடும் $v = 20$, $u = 1.185$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியே $w = 0$ ஆகும். u - அளவுகோலில் 1 முதல் 1.5 முடியவே அளவீடுகள் செய்யப்பட்ட போதிலும் தேவையை முன்னிட்டு $u = 0.997$ என்ற புள்ளியைக் குறித்துக் கொள்ளவேண்டும். $w = 0$ என்ற புள்ளியைக் குறித்ததுபோல, $w = 5, 10, 15, 20, 25, 28$ என்ற புள்ளிகளைக் குறிக்கவேண்டும். பின்னர் இப் புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு ஒன்றை வரைந்தால்

w - அளவுகோல் கிடைக்கும். அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேம வரையத்தில் w-அளவுகோல் ஏறத்தாழ ஒரு சீர்அளவுகோல்போல் இருப்பதால் $w = 1, 2, 3, 4, 6, 7,$ ...... போன்ற இடைநிலை (intermediate) மதிப்புகளுக்குரிய அளவுக் குறியீடுகளைக் கண் மதிப்பாகக் குறிக்கலாம்.

w- அளவுகோல் ஒரு சீரிலா அளவுகோலாக இருந்தால் இடை நிலை அளவுக் குறியீடுகளைக் குறிப்பது எப்படி? w-அளவுகோலின் ஒரு முனையிலிருந்து w - அளவுகோலில் குறிக்கப்பட்ட வெவ்வேறு அளவீடுகளுக்குள்ள வரைகோட்டுத் தூரங்களை அளந்து கொள்ள வேண்டும். இந்தத் தூரங்களை மட்டாயமாகவும் இவைகளுக்கு ஒத்த அளவீடுகளைக் குத்தாயமாகவும் கொண்டு, வரைகோட்டுத் தூரங்களுக்கும் அளவீடுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பினைக் காட்டும் வரைபடத்தை வரையவேண்டும். இவ் வரைபடத்திலிருந்து தேவையான அளவீட்டுக்குரிய வரைகோட்டுத் தூரத்தைக்காண லாம். பின்னர், இவ் வரைகோட்டுத் தூரத்திற்குரிய புள்ளியை w அளவுகோலின் மீது குறித்தால் தேவையான அளவீட்டுக் குரிய அளவுக்குறியீடு கிடைக்கும்.

u, v-அளவுகோல்களை ஒரே திசையில் செல்லுமாறும் நேம வரையத்தை அமைக்கலாம். அப்பொழுது, w - அளவுகோலானது u, v- அளவுகோல்களுக்கு இடையில் இல்லாமல், வெளியில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 47

சில உப்புகளின் நிறையுற்ற நீரியக் கரைசல்களின் (saturated aqueous solutions) ஆவி அழுத்தம் p (3 முதல் 30 மி.மீ. பாதரசம் முடிய), வெப்பநிலை t ($0°$ முதல் $27°$ முடிய) என்ற இரண்டுக்கும்

உப்புகள்	A	B
K_2SO_4	9.1881	2332.5
KCl	8.8750	2258.0
$NaCl$	8.9850	2306.0
$CsCl$	8.5621	2198.5
Na_2SO_4	10.3630	2696.6

உள்ள தொடர்பானது $\log p = A - \frac{B}{t + 273}$ என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. A, B என்பவற்றின் மதிப்புகள் கீழ்க்கண்டவாறு உப்புகளைப் பொறுத்தன.

இந்த அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு நேர்கோட்டு ஆய விளக்கப்படம் ஒன்றை அமை.

நேர்கோட்டு ஆய விளக்கப்படம் அமைப்பதற்கேற்ப ஒவ்வோர் உப்புக்கும், p, t என்பவற்றின் ஒத்த மதிப்புகளின் இரண்டு தொகுதிகளைக் கொடுக்கக்கூடிய அட்டவணையை முதலில் அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

$$\log p = A - \frac{B}{t + 273}$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, அந்தந்த உப்புக்குரிய A, B - மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி $t = 0$, $t = 27$ என்ற மதிப்புகளுக்கான

அட்டவணை 28

உப்புகள்	t	$\log p$	p
K_2SO_4	0	0.6441	4.407
	27	1.4131	25.890
KCl	0	0.6040	4.018
	27	1.3483	22.300
$NaCl$	0	0.5380	3.451
	27	1.2983	19.870
$CsCl$	0	0.5091	3.229
	27	1.2338	17.130
Na_2SO_4	0	0.4850	3.055
	27	1.3743	23.680

p - யின் மதிப்புகள் அட்டவணை 28 - இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கணக்கீட்டு வேலைகளைக் குறைத்துக் கொள்வதற்காக t - க்கு 0, 27 என்ற அதே மதிப்புகள் ஒவ்வோர் உப்புக்கும் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன.

p, t - அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீது ஒன்றுக்கொன்று எதிரான திசைகளில் செல்லுமாறு அமைக்க வேண்டும். p, t - அளவுகோல்களின் இடைத்தூரம் எதுவாக வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம். p, t - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$x = m_1 \log p$$

$$y = m_2 \left[-\frac{1}{t + 273} \right]$$

எனக் கொள்ளவேண்டும். p - யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (\log 30 - \log 3)$$
$$= m_1$$

$m_1 = 10$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. t-யின் சமன் பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_2 \left[\frac{1}{273} - \frac{1}{300} \right]$$

$$= 0.00033\, m_2$$

$m_2 = 30{,}000$ எனக் கொள்க. p, t- அளவுகோல்களின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$x = 10 \log p$$

$$y = -\frac{30{,}000}{t + 273}$$

ஆகும். p - அளவுகோலைக் கீழிருந்து மேலாகவும், t - அளவுகோலை மேலிருந்து கீழாகவும் அமைத்துக் கொள்க (படம் 119). $-\dfrac{30{,}000}{t + 273}$ என்பது ஒரு கூடும் சார்பாதலாலும் (increasing function), t - அளவுகோலை மேலிருந்து கீழாக அமைப்பதாலும், t - அளவுகோலில் அளவீடுகள் மேலிருந்து

கீழாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லும். p - அளவுகோலை அச்சடித்த மடக்கை அளவுகோலின் உதவியால் எளிதில் அமைத்துவிடலாம். t - அளவுகோலை அமைக்க t - யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான தூரங்களைக் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்து கணக்கிட்டு அட்டவணைப்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும். அட்டவணை 29 -இன்

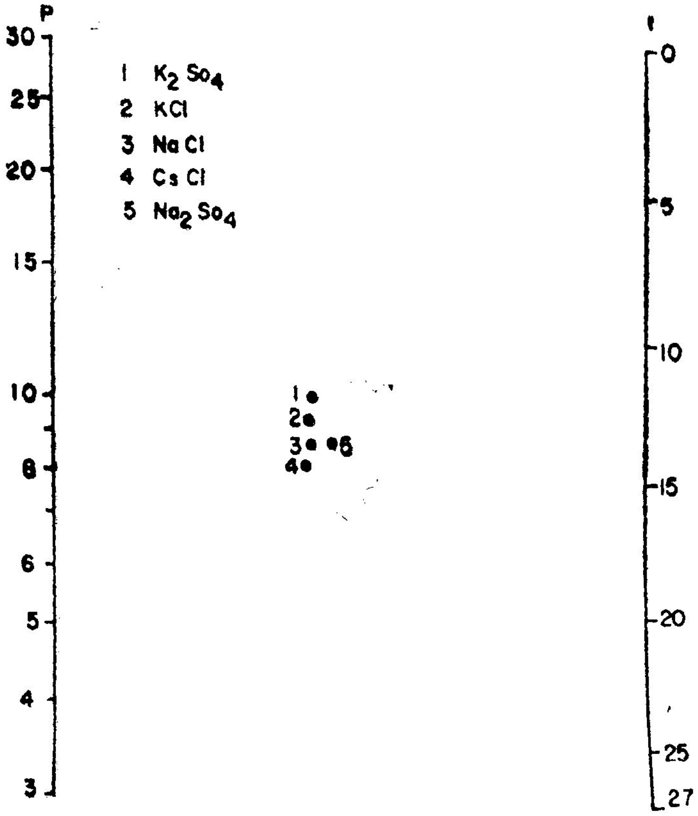
அட்டவணை 29

t	$-\dfrac{30{,}000}{t+273}$	$-\dfrac{30{,}000}{t+273}-\left(-\dfrac{30{,}000}{273}\right)$
0	— 109.9	0
5	— 107.9	2.0
10	— 106.0	3.9
15	— 104.2	5.7
20	— 102.4	7.5
25	— 100.7	9.2
27	— 100.0	9.9

இறுதி நிரலில் உள்ள எண்கள் t - அளவுகோலில் 0 என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்கள் ஆகும். செ. மீ., மி. மீ. அளவுகள் குறிக்கப்பட்ட சீர் அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி,- அளவீடுகள் மேலிருந்து கீழாகக் கூடிக்கொண்டு செல்லுமாறு t - அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும்.

பிறகு அட்டவணை 28 - ஐப் பயன்படுத்தி p, t - மதிப்புகளுக்கான குறியிணைப்புக்கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளை வரைந்து உப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறிக்கவேண்டும். $t = 0,\ p = 4.407$ என்ற புள்ளிகளுக்குரிய குறியிணைப்புக் கோட்டையும் $t = 27, p = 25.89$ என்ற புள்ளிகளுக்குரிய குறியிணைப்புக் கோட்டையும் வரைந்து இக் கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியை 1 எனக் குறிக்கவேண்டும். 1 என்ற இந்த எண் K_2SO_4 என்பதைக் குறிக்கும். இது போன்றே மற்ற நான்கு உப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளை 2, 3, 4, 5

என்று குறிக்க வேண்டும். 1, 2, 3, 4, 5 என்ற எண்கள் அளவீடுகள் அல்ல. இவை உப்புகளைக் குறிக்கக் கூடிய எண்களே ஆகும். எனவே குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு ஒன்றை வரைவது பொருளற்றது.



படம் 119

அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் இரண்டு இணையளவுகோல்களும் இந்த அளவுகோல்களுக்கிடையே சில புள்ளிகளும் உள்ளன. இம்மாதிரியாக மூன்றாவது அளவு கோலின்றி அதற்குப் பதிலாகச் சில புள்ளிகளைக் கொண்ட நேமவரையத்தை எவ்வாறு பயன்படுத்துவது ? கொடுக்கப்பட்ட p, t - மதிப்புகளுக்கு வரையப்பட்ட குறியிணைப்புக்கோடானது, உப்புகளைக் குறிக்கும் ஐந்து புள்ளிகளில் எந்தப் புள்ளி வழியாகவும் செல்லாமல் இருக்கலாம். எனவே p, t - மதிப்பு

களிலிருந்து அவை எந்த உப்புக்குரியவை எனக் காண அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்தைப் பெரும்பாலும் பயன்படுத்துவது கிடையாது. கொடுக்கப்பட்ட ஐந்து உப்புகளில் ஏதேனும் ஓர் உப்புக்குரிய p-யின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால் t - யின் மதிப்பையும், t - யின் மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால் p - யின் மதிப்பையும் காணவே அமைக்கப்பட்ட நேமவரையம் பயன்படுகிறது. ஓர் உப்புக்குரிய p - மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால் p - யின் மதிப்புக்கான புள்ளியையும் அந்த உப்புக்கான புள்ளியையும் ஒரு நேர் கோட்டால் இணைத்தால் இக்கோடு t - அளவுகோலைத் தேவையான t - மதிப்பில் வெட்டும். இது போன்ற ஓர் உப்புக்குரிய t - மதிப்பு கொடுக்கப்பட்டால் p - யின் மதிப்பைக் காணலாம்.

p, t -அளவுகோல்கள் ஒரே திசையில் செல்லுமாறு நேமவரையத்தை அமைத்தால் உப்புகளைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் p, t - அளவுகோல்களுக்கிடையில் இல்லாமல் வெளியே இருக்கும்.

பயிற்சி

1. ஓர் அச்சகத்தில் பணியாற்றும் சிலரை வேலையிலிருந்து நீக்க வேண்டிய சூழ்நிலை ஏற்படுகிறது. எனவே, அவர்களுக்கு m மாதங்களுக்குரிய சம்பளத்தைக் கொடுத்து வேலையிலிருந்து நீக்கி விடுகின்றனர். m - இன் மதிப்பைக் காண $m^2 = my + c$ என்ற சமன்பாடு பயன்படுத்தப் படுகிறது. இதில் y என்பது நீக்கப்படும் தொழிலாளி அந்த அச்சகத்தில் பணியாற்றிய ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையையும், c என்பது அத் தொழிலாளிக்குள்ள குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையையும் குறிக்கின்றன. இச் சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை.

   m (0 - 5); y (0 - 4); c (0 - 8).

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு நேமவரையம் அமை (2 - 26).

2. $a + 0.005\,d\,(l + l^2) = l$

   a = சாதனத்தின் வயது, (0 - 30) ஆண்டுகள்.

   d = வயது கணக்கிடப்பட்ட ஆண்டில் சாதனத்தின் மதிப்பிறக்கம் (depreciation), (0 - 50) %

   l = சாதனத்தின் ஆயுள், (3 - 40) ஆண்டுகள்.

3. $E = \left(\frac{p - d}{p}\right)100$

E = கூட்டின் (shell) திறப்பாடு (efficiency), நூற்று வீதம்.

p = துவாரங்களின் (holes) புரியிடைத் தூரம், (0 - 25) செ.மீ.

d = துவாரங்களின் விட்டம், (0 - 10) செ.மீ.

4. $\frac{D^4 - d^4}{Dz} = 5.1$

z = இயந்திரத் தண்டின் (shaft) முறுக்குக் குணகம் (torsional modulus), (0 - 500) செ.மீ.[3]

D = இயந்திரத் தண்டின் வெளிவிட்டம், (0 - 20) செ.மீ.

d = உள்விட்டம், (0 - 20) செ.மீ.

5. $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

A = உருளையின் மொத்த மேற்பரப்பு, செ.மீ.[2]

r = ஆரம், (2 - 10) செ.மீ.

h = உயரம், (5 - 20) செ.மீ.

6. $V = \frac{\pi}{6}(3a^2 + h^2)h$

V = கோளத்துண்டின் (spherical segment) கன அளவு, செ. மீ.[3]

a = துண்டின் அடிப்பக்க (base) ஆரம், (5 - 25) செ.மீ.

h = துண்டின் உயரம், (2 - 25) செ.மீ.

7. $r = \frac{b^2}{8h} + \frac{h}{2}$

r = வட்டத்தின் ஆரம், (0 - 20) செ.மீ.

b = வட்டத் துண்டின் அடிப்பக்கம், (0 - 20) செ. மீ.

h = வட்டத் துண்டின் உயரம், (0 - 40) செ.மீ.

8. $h = \frac{1}{2} gt (T - t)$

h = உயரம், (0 - 100) செ. மீ.

t = நேரம், (0 - 30) நொடி.

T = தூக்கி எறியப்பட்ட பொருள் மீண்டும் கிடைத்தளத்தை (horizontal plane) வந்தடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம், (0 - 30) நொடி.

g = 981 செ.மீ. /நொடி^{2}.

9. $\sin 2x = a \sin x + b$

a (0 - 2); b (0 - 1); x (0° - 90°)

10. $\tan x = ax + b$

a (—1 முதல் 1 முடிய); b (0 - 2); x (0° - 45°)

11. $\log (1 + x) = a + \frac{b}{x}$

a (0 - 1); b (0 - 1)

12. $a^x b = x^2$

a (1 - 10); b (0.1 - 10)

13. $a^x b^{\frac{1}{x}} = 4$

a (1 - 10); b (1 - 10)

14. $a^x x^b = 2x$

a (1 - 10); b (0 - 5)

15. $x^4 + ax^2 + b = 0$

a (— 100 முதல் 100 முடிய); b (—100 முதல் 100 முடிய)

16. $$ax - \frac{b}{x} = 1$$

a (0 - 1); b (—10 முதல் 0 முடிய)

17. $$x^3 = ax^2 + b$$

a (0 - 10); b (0 - 1000)

18. $$x^{1.5} + ax + b = 0$$

a (—100 முதல் 0 முடிய); b (— 30 முதல் 0 முடிய)

19. $$\frac{1}{3\,u^2} + \frac{\pi\,w}{v} = \frac{1}{w^2}$$

u (0 - 10) ; v (0 - 50)

20. $$\frac{w}{u - 1} + \frac{3\,w^2 + 2}{v^2} = 1$$

u (1 - 6); v (0 - 10); w (1 - 5)

21. $$z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

x (0.5 - 10); y (1 - 5)

22. $$R = \frac{p}{P - p}$$

R = அம்மோனியா ஆவிக்கும் மந்த வாயுக்கும் (inert gas) உள்ள விகிதம்.

P = அழுத்தம், (300 - 800) மி.மீ. பாதரசம்.

p = கொண்மி (condenser) வெப்பநிலையில் அம்மோனியாவின் ஆவி அழுத்தம், (10 - 100) மி.மீ. பாதரசம்.

23. $$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R^3 - r^3}{R - r}\right)$$

R (15 - 25); r (0 - 10)

24. $l = \dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$

$a\ (1 - 5);\ b\ (1 - 5);\ l\ (0 - 5)$

25. $uw = vw + u^2 + v^1$

$u\ (1 - 2.5);\ v\ (1 - 1.5)$

26. $ad\,(a + b) = c$

$a\ (0 - 5);\ b\ (0 - 5)$

27. கந்தக அமிலத்தின் (sulphuric acid) அடர்த்தி எண்ணை $\log \delta = a + bC$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து காணலாம். இங்கு

δ = அடர்த்தி எண், (0.95 - 1.25)

C = செறிவு, (1 - 30)%

பல்வேறு வெப்பநிலைகளுக்குரிய a, b இவற்றின் மதிப்புகளைக் கீழ்க்கண்ட அட்டவணை கொடுக்கிறது.

வெப்பநிலை (°C)	a	b
10	— 0.00005	0.0029467
15	— 0.00044	0.0029149
25	— 0.00144	0.0028605
30	— 0.00215	0.0028408

இதற்கு நேர்கோட்டு ஆய விளக்கப்படம் ஒன்றை அமை.

28. $\log\,(\mu - 0.4) = a + bt$ என்ற சமன்பாட்டில் a, b என்பன C - யின் சார்புகளாகும். இங்கு

μ = சோடியம் ஹைட்ராக்சைடு (sodium hydroxide) கரைசலின் பிசுப்புமை (viscosity), (0.7 - 8.0) சென்டிபாய்சு (centipoise)

C = செறிவு, (0.5 - 8) கி. / லிட்டர் (litre)

t = வெப்பநிலை. (20 - 40)° C

பல்வேறு செறிவுகளுக்கான μ, t இவற்றின் மதிப்புகள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

C	t = 20 எனில் μ	t = 35 எனில் μ
0.5	1.112	0.798
1.0	1.234	0.887
2.0	1.545	1.096
3.0	1.963	1.373
4.0	2.548	1.739
5.0	3.330	2.216
6.0	4.370	2.830
7.0	5.820	3.613
8.0	7.800	4.604

இதற்கு நேர்கோட்டு ஆய விளக்கப்படம் ஒன்று அமை.

29. $P = aS^b$ என்னும் சமன்பாட்டில் P என்பது குளோரின் மோனாக்சைடானது (chlorine monoxide) அதன் நீரியக் கரைசல்களின் மீது கொண்டுள்ள பகுதி அழுத்தம் ஆகும். S என்பது குளோரின் மோனாக்சைடின் கரை திறன் ஆகும். இங்கு a, b என்பன கீழ்க்கண்டவாறு வெப்பநிலையைப் பொறுத்தன.

t	a	b
0	0.01757	2.003
2	0.02280	1.958
4	0.02675	1.955
6	0.02955	1.968
8	0.03200	1.982
10	0.03472	1.995
12	0.03830	2.007
14	0.04309	2.020
16	0.04970	2.034
18	0.05921	2.046
20	0.07163	2.060

இதற்கு நேர்கோட்டு ஆய விளக்கப்படம் ஒன்றை அமை,
$P(1-20)$; $S(3-40)$ கி./100 கி. நீர்.

30. $\log \mu = a + \frac{b}{t + 210}$ என்ற சமன்பாட்டில்

μ = அக்கிரிலிக் ஒற்றை உறுப்பியின் (acrylic monomer) பிசுப்புமை, (0.4 - 1) சென்டிஸ்டோக்கு (centistoke)

t = வெப்பநிலை, C°

a, b என்பன ஒற்றை உறுப்பியைப் பொறுத்தன. μ, t - இவற்றின் ஒத்த மதிப்புகள் கீழே அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	μ	t
பியூட்டைல் மைத்தாக்ரிலேட்டு (butyl methacrylate)	1.025 0.610	25 70
ஈத்தைல் மைத்தாக்ரிலேட்டு (ethyl methacrylate)	0.905 0.420	0 70
ஈத்தைல் அக்ரிலேட்டு (ethyl acrylate)	0.811 0.377	0 70
மீத்தைல் மைத்தாக்ரிலேட்டு (methyl methacrylate)	0.765 0.377	0 70
மீத்தைல் அக்ரிலேட்டு (methyl acrylate)	0.650 0.400	0 50

இதற்கு நேர்கோட்டு ஆய விளக்கப்படம் ஒன்றை அமை.

8. ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட நேமவரையங்கள்

(Combined Nomograms)

மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையங்கள் சிலவற்றை ஒருங்கிணைத்து

$$f_1(u) + f_2(v) + f_3(w) + \ldots\ldots = f_n(t)$$

என்றவகைச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைத்தது நினைவிருக்கலாம். இதேபோன்று ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையங்கள் சிலவற்றை ஒருங்கிணைத்து

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} + \frac{1}{f_3(w)} + \ldots\ldots = \frac{1}{f_n(t)}$$

என்றவகைச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கப்பட்டது. இவ்விரண்டு வகைச் சமன்பாடுகளைத் தவிர வேறு பல சமன் பாடுகளுக்கும் மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேம வரையங்கள், Z - விளக்கப்படங்கள், ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையங்கள், மீண்டும் வரும் மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளுக்கான நேம வரையங்கள் போன்றவற்றை ஒருங்கிணைத்து நேமவரையங்கள் அமைக்கலாம்.

26. $f_1(u) + f_2(v)\,f_3(w) = f_4(t)$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

இச் சமன்பாட்டை

$$f_2(v)\,f_3(w) = q$$

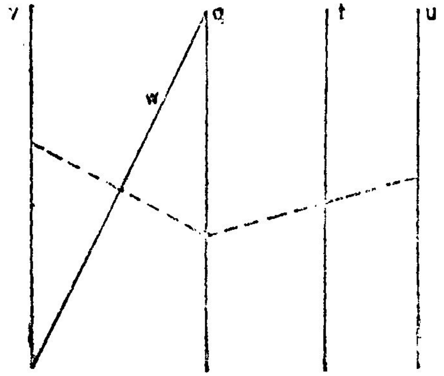
அதாவது $$\frac{q}{f_2(v)} = f_3(w) \quad \ldots \quad (1)$$

$$f_1(u) + q = f_4(t) \quad \ldots \quad (2)$$

என்னும் இரு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொண்டு படம் 120 - இல் காட்டியவாறு நேமவரையம் அமைக்க லாம். சமன்பாடு (1) - க்கு Z - விளக்கப்படமும், சமன்பாடு

(2) - க்கு இணையளவுகோல் நேமவரையமும் அமைக்கப்பட்டு ஒருங்கிணைக்கப்பட்டுள்ளன. q - அளவுகோல் ஓர் இயக்குமையக் கோடாதலால் q - அச்சின் மீது அளவுக்குறியீடுகள் தேவையில்லை.

சமன்பாடு (1) - க்கு Z - விளக்கப்படம் அமைக்கையில் இடது பக்க நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மீது q- அளவுகோலையும் வலது பக்க நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மீது v - அளவுகோலையும் அமைக்க வேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை. படம் 120 - இல் காட்டிய



படம் 120

வாறு v - அளவுகோலை இடதுபக்க நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மீதும், q - அளவுகோலை வலதுபக்க நிலைக்குத்துக் கோட்டின் மீதும் அமைக்கலாம். இவ் வகை அமைப்பிலும் w - வின் துணையளவுகோலை q - அச்சின் மீது அமைக்கவேண்டும். w - அளவுகோலை அமைக்கப் பயன்படுத்தும் நிலைப்புள்ளியை v - அச்சின்மீதும் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

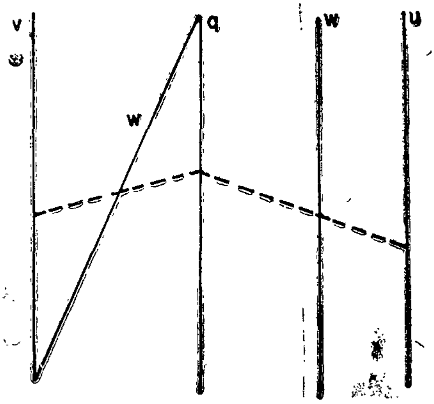
$$f_1(u) + f_2(v) f_3(w) = f_4(t)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைத்த முறையை அடிப் படையாகக் கொண்டு, மீண்டும் வரும் மாறியைக் கொண்ட

$$f_1(u) + f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குப் படம் 121 - இல் காட்டியவாறும் நேம வரையம் அமைக்கலாம். இவ்வாறு அமைப்பதற்கு $f_4(w)$ என்ற சார்பை நான்காவது மாறியின் சார்பாகக் கருதிக்கொண்டு அதற்கெனத் தனியாக ஓர் அளவுகோல் அமைக்கவேண்டும். எனவே, இவ் வமைப்பில் w என்னும் மாறிக்கு இரு அளவு

கோல்கள் இருக்கும். நிலைக்குத்துக்கோட்டின் மீது ஒரு w - அளவு கோல் இருக்கும். மூலைவிட்டக் கோட்டின்மீது மற்றொரு w – அளவுகோல் இருக்கும்.



படம் 121

w-வின் மதிப்பும், u, v என்பவற்றில் ஒன்றன் மதிப்பும் தரப் பட்டால் படம் 121-இன் அமைப்பில் உள்ள நேமவரையத்தைப் பயன்படுத்தி மூன்றாவது மாறியின் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கலாம். ஆனால் u, v இவற்றின் மதிப்புகளிலிருந்து w-வின் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கப் படம் 121-இல் உள்ள அமைப்பு ஏற்றதல்ல. ஏனெனில் q - அச்சின் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து கொடுக்கப் பட்ட u, v - மதிப்புகளுக்கு வரையப்பட்ட இரண்டு குறியிணைப்புக் கோடுகளும் இரண்டு w- அளவுகோல்களையும் சமமதிப்பில் வெட்டுமாறு அமைந்தால்தான் தேவையான w- மதிப்பு கிடைக்கும். q - அச்சில் உள்ள அந்தக் குறிபிட்ட புள்ளியைக் கண்டு பிடிப்பதற்கோ சோதனைப் பிழை முறையைப் (trial and error method) பயன்படுத்த வேண்டும். அதாவது q - அச்சில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி தேவையான புள்ளியாக இருக்குமா எனச் சோதனை செய்து பார்த்து இல்லையேல், தேவையான புள்ளி கிடைக்கும்வரை ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் சோதனை செய்து பார்க்கவேண்டும். இது எளிய செயலல்ல ஆதலால்

$$f_1(u) + f_2(v) f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு முந்திய அதிகாரத்தில் படித்த நேம வரைய அமைப்பே சிறந்தது.

27. $f_1(u)\,f_2(v) + f_3(w)\,f_4(t) = f_5(t)$ என்றவகைச் சமன்பாடு

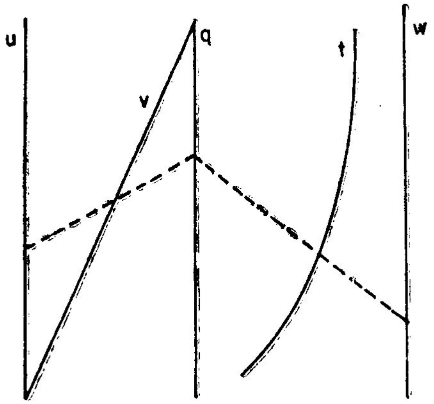
இச் சமன்பாட்டை

$$f_1(u)\,f_2(v) = q$$

அதாவது $\dfrac{q}{f_1(u)} = f_2(v) \quad \ldots \quad (1)$

$$q + f_3(w)\,f_4(t) = f_5(t) \quad \ldots \quad (2)$$

என்னும் இரு சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு படம் 122-இல் காட்டியவாறு நேமவரையம் அமைக்கலாம்.



படம் 122

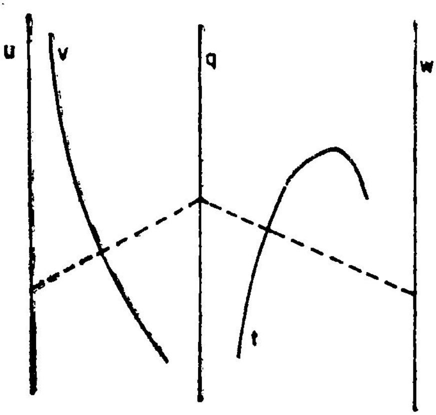
28. $f_1(u)\,f_2(v) + f_3(w)\,f_4(t) = f_5(v) + f_6(t)$ என்றவகைச் சமன்பாடு

இச் சமன்பாட்டை

$$f_1(u)\,f_2(v) - q = f_5(v) \quad \ldots \quad (1)$$

$$f_3(w)\,f_4(t) + q = f_6(t) \quad \ldots \quad (2)$$

என்னும் இரண்டு சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு படம் 123 - இல் காட்டியவாறு நேமவரையம் அமைக்கலாம்.



படம் 123

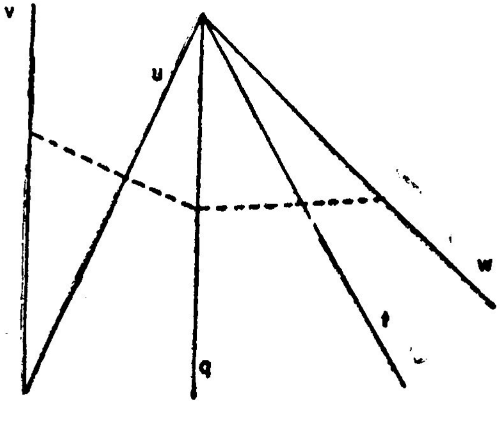
29. $\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)} + \dfrac{1}{f_3(w)} = \dfrac{1}{f_4(t)}$ என்றவகைச் சமன்பாடு

இச்சமன்பாட்டை q என்னும் இடைநிலை மாறியின் உதவியால்

$$\frac{f_2(v)}{f_1(u)} = q$$

அதாவது $\dfrac{f_2(v)}{q} = f_1(u)$ ... (1)

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{f_3(w)} = \frac{1}{f_4(t)} \quad \text{—} \quad (2)$$



படம் 124

என்னும் இரு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொண்டு படம் 124-இல் காட்டிவாறு நேமவரையம் அமைக்கலாம்.

முந்திய அதிகாரத்தில் பார்த்த

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{f_4(w)}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

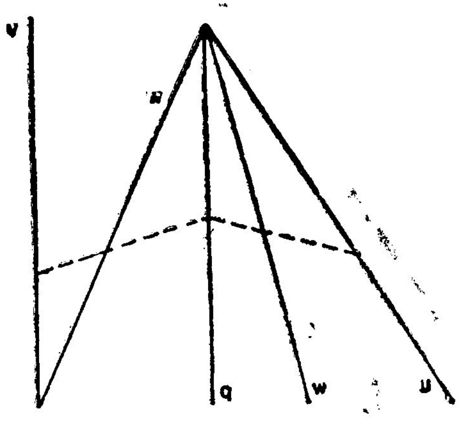
என்ற சமன்பாட்டுக்கு

$$\frac{f_2(v)}{f_4(w)} = q$$

அதாவது $$\frac{f_2(v)}{q} = f_4(w) \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{f_1(u)} = \frac{1}{f_3(w)} \quad \dots \quad (2)$$

என்னும் இரு சமன்பாடுகளுக்குரிய நேமவரையங்களை ஒருங்கிணைத்து, படம் 125 - இல் காட்டியவாறும் நேமவரையம் அமைக்கலாம். இவ்வமைப்பில் சமன்பாடு (1)-க்கு அமைக்கப் பட்ட நேமவரையத்தில் ஒரு w - அளவுகோலும், சமன்பாடு (2) - க்கு அமைக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் மற்றொரு w - அளவு கோலும், ஆக இரு w - அளவுகோல்கள் உள்ளன. w – வின் மதிப்பும், u, v என்பவற்றில் ஒன்றன் மதிப்பும் தரப்பட்டால்



படம் 125

இந்த நேமவரையத்தைப் பயன்படுத்தி மூன்றாவது மாறியின் மதிப்பை எளிதில் கண்டுபிடித்துவிடலாம். ஆனால் u, v - மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் அவற்றிற்கு ஒத்த w - வின் மதிப்பை, படம் 125 - ஐப் பயன்படுத்தி அவ்வளவு எளிதில் காணமுடியாது. எனவே

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{f_4(w)}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு முந்திய அதிகாரத்தில் படித்த அமைப்பே சிறந்தது.

30. $\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)} + \dfrac{f_3(w)}{f_4(t)} = \dfrac{1}{f_5(w)}$ என்றவகைச் சமன்பாடு

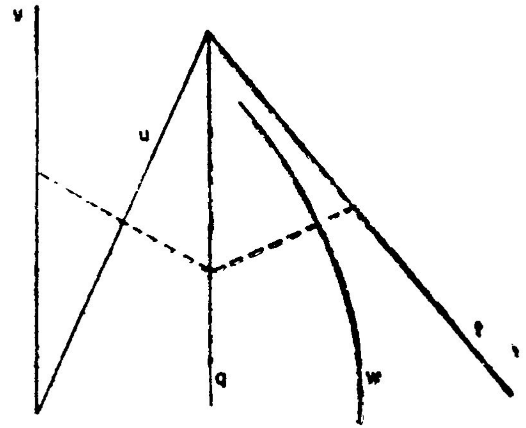
இச் சமன்பாட்டை

$$\frac{f_2(v)}{f_1(u)} = q$$

அதாவது $\dfrac{f_2(v)}{q} = f_1(u) \qquad \ldots \quad (1)$

$$\frac{1}{q} + \frac{f_3(w)}{f_4(t)} = \frac{1}{f_5(w)} \qquad \ldots \quad (2)$$

என்னும் இரு சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு படம் 126 - இல் காட்டியவாறு நேமவரையம் அமைக்கலாம்.



படம் 126

31. $f_1(u) + f_2(v) = \dfrac{f_3(w)}{f_4(t)}$ என்றவகைச் சமன்பாடு

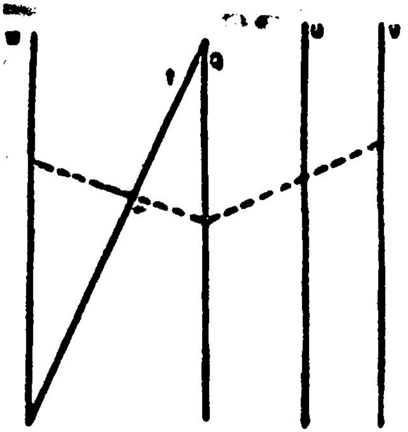
இச் சமன்பாட்டுக்கு இரண்டு இணையான அல்லது இரண்டு செங்குத்தான குறியிணைப்புக் கோடுகளைப் பயன்படுத்தி நேமவரையம் அமைக்கலாம் என அதிகாரம் ஐந்தில் சொல்லப்பட்டது. இச்சமன்பாட்டுக்கு

$$\frac{f_3(w)}{f_4(t)} = q$$

அதாவது $\dfrac{f_3(w)}{q} = f_4(t) \quad \ldots \quad (1)$

$$q - f_2(v) = f_1(u) \quad \ldots \quad (2)$$

என்னும் இரு சமன்பாடுகளுக்குரிய நேமவரையங்களை ஒருங்கிணைத்து, படம் 127 - இல் காட்டியவாறும் நேமவரையம் அமைக்கலாம்.



படம் 127

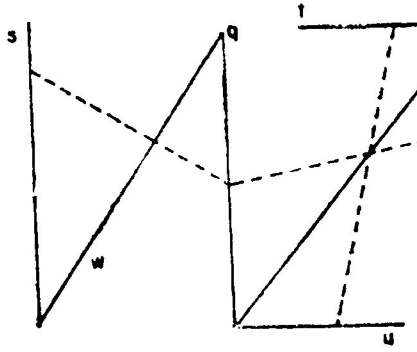
32. $f_1(u)\, f_2(v)\, f_3(w) = f_4(t)\, f_5(s)$ என்றவகைச் சமன்பாடு

இச் சமன்பாட்டை

$$\frac{f_1(u)}{f_4(t)} = \frac{q}{f_2(v)} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{f_5(s)}{q} = f_3(w) \quad \ldots \quad (2)$$

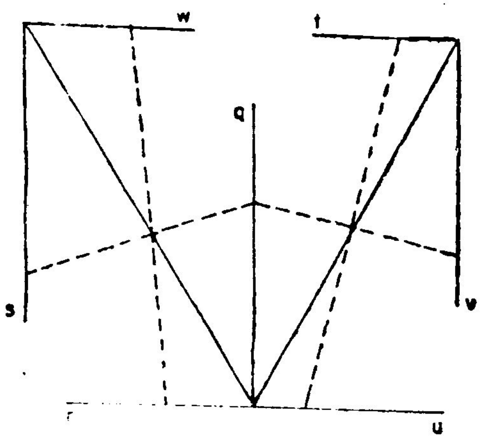
என்னும் இரு சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொண்டு படம் *128* - இல் காட்டியவாறு நேமவரையம் அமைக்கலாம்.



படம் 128

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மடக்கை அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக் கொண்டு இணையளவுகோல் நேமவரையமும் அமைக்கலாம்.

33. $f_1(u)\,f_2(v)\,f_3(w) = f_4(t)\,f_5(s)\,f_6(r)$ என்றவகைச் சமன்பாடு



படம் 129

இச் சமன்பாட்டை

$$\frac{f_1(u)}{f_4(t)} = \frac{q}{f_2(v)} \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{f_5(s)}{q} = \frac{f_3(w)}{f_6(r)} \quad \dots \quad (2)$$

என்னும் இரு சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு படம் 129 - இல் காட்டியவாறு நேமவரையம் அமைக்கலாம். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மடக்கை அமைப்பில் மாற்றி எழுதிக்கொண்டு இணையளவுகோல் நேமவரையமும் அமைக்கலாம்.

34. $\dfrac{f_1(u) + f_2(v)}{f_1(u) - f_2(v)} + \dfrac{f_3(w)}{f_4(t)}$ என்றவகைச் சமன்பாடு

இச் சமன்பாட்டை

$$f_1(u) + f_2(v) = p$$

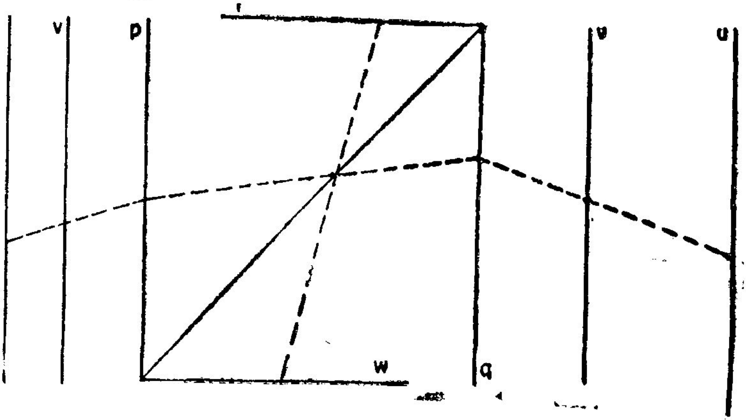
அதாவது $-f_1(u) + p = f_2(v) \quad \dots \quad (1)$

$$f_1(u) - f_2(v) = q$$

அதாவது $-q + f_1(u) = f_2(v) \quad \dots \quad (2)$

$$\frac{p}{q} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)} \quad \dots \quad (3)$$

என்னும் மூன்று சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு படம் 130 - இல் காட்டியவாறு நேமவரையம் அமைக்கலாம்.



படம் 130

இவ் வமைப்பில் u என்ற மாறிக்கு இரு அளவுகோல்களும் v என்ற மாறிக்கு இரு அளவுகோல்களும் தேவைப்படுகின்றன. அத்துடன் இந்த அமைப்பிலுள்ள நேமவரையத்தைப் பயன் படுத்தி, u, w, t - மதிப்புகளிலிருந்து v - யின் மதிப்பையோ, v, w, t - மதிப்புகளிலிருந்து u - வின் மதிப்பையோ காண்பது எளிதல்ல. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்குப் படம் 131 அல்லது 132 - இல் காட்டியவாறும் நேமவரையம் அமைக்கலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

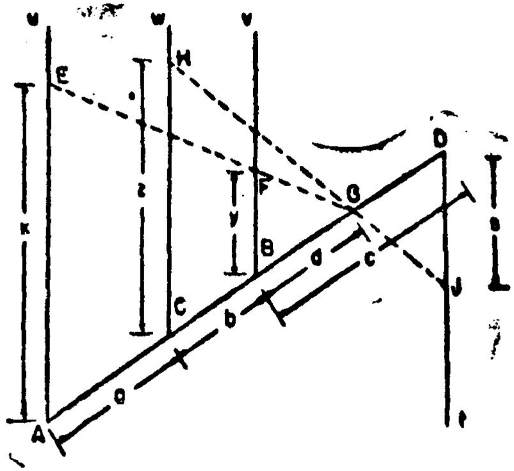
$$x = m_1 f_1(u)$$

$$y = m_2 f_2(v)$$

$$z = m_3 f_3(w)$$

$$s = m_4 f_4(t)$$

எனக் கொள்க. நான்கு அளவுகோல்களையும் நான்கு இணைகோடு களின்மீது அமைக்கவேண்டும் (படம் 131). நான்கு அளவுகோல் களின் தொடக்கப் புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டின்மீது அமைய வேண்டும். தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு இயக்கு மையக் கோடாகப் பயன்படுகிறது. u, v, w - அளவு கோல்கள் மூன்றும் கீழிருந்து மேலாகச் செல்லவேண்டும். t - அளவுகோல் மேலிருந்து கீழாகச் செல்லவேண்டும். w - அளவு கோலை u, v - அளவுகோல்களுக்கிடையில் அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். படத்தில் A, B, C, D என்ற புள்ளிகள் முறையே



படம் 131

u, v, w, t - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகள் ஆகும். AC, CB, BD என்னும் நீளங்களை முறையே a, b, c செ.மீ. எனக் கொள்க. கொடுக்கப்பட்ட u, v - மதிப்புகளை இணைக்கும் EF என்ற குறியிணைப்புக் கோடு, இயக்கு மையக் கோட்டை G என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். G என்ற புள்ளியையும், கொடுக்கப்பட்ட w-வின் மதிப்புக்கான H என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடு t - அச்சை J-யில் வெட்டட்டும். கொடுக்கப்பட்ட u, v, w - மதிப்புகளுக்கு ஒத்த t – யின் மதிப்புக்கான புள்ளி J ஆக இருக்கவேண்டுமெனில், அளவுகோல் குணகங்களுக்கும், அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரங்களுக்கும் உள்ள தொடர்புகளை இப்பொழுது காணலாம். படம் 131 - இல் AGE, BGF என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{AE}{BF} = \frac{AG}{BG}$$

அதாவது $$\frac{x}{y} = \frac{a+b+d}{d} \qquad \dots \quad (1)$$

இங்கு d என்பது BG - யின் நீளமாகும். CGH, DGJ என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களிலிருந்து

$$\frac{CH}{DJ} = \frac{CG}{DG}$$

அதாவது $$\frac{z}{s} = \frac{b+d}{c-d} \qquad \dots \quad (2)$$

(1) – இல் இருந்து $d = \dfrac{a+b}{\left(\dfrac{x}{y}\right) - 1}$

d-யின் இந்த மதிப்பை (2) - இல் பதிலிட்டுச் சுருக்கினுல்

$$\frac{z}{s} = \frac{bx + ay}{cx - (a+b+c)\,y}$$

இதில் x, y, z, s இவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$\frac{m_3 f_3(w)}{m_4 f_4(t)} = \frac{b\, m_1 f_1(u) + a\, m_2 f_2(v)}{c\, m_1 f_1(u) - (a+b+c)\, m_2 f_2(v)}$$

இச் சமன்பாடு

$$\frac{f_3(w)}{f_4(t)} = \frac{f_1(u) + f_2(v)}{f_1(u) - f_2(v)}$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்,

$$b\, m_1 = a\, m_2$$

$$c\, m_1 = (a + b + c)\, m_2$$

$$\frac{b}{c} = \frac{m_3}{m_4}$$

m_1, m_2, u என்பவற்றின் மதிப்புகளை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொண்டால், முதலிரண்டு தொடர்புகளிலிருந்து b, c இவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுகொள்ளலாம். பின்னர் m_3 அல்லது m_4 - இன் மதிப்பை வசதிக்கேற்பத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொண்டு இறுதித் தொடர்பிலிருந்து m_4 அல்லது m_3 - இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்துக் கொள்ளவேண்டும்.

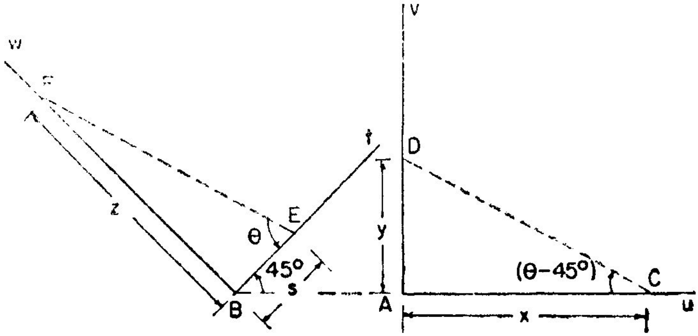
' மேற்கண்ட அமைப்பில் ஒரு குறியிணைப்புக் கோடு u, v - மதிப்புகளையும், மற்றொரு குறியிணைப்புக் கோடு w, t - மதிப்புகளையும் இணைக்கின்றன என்பதை நினைவிற் கொள்க. இவ்விரு குறியிணைப்புக் கோடுகளும் இயக்கு மையக்கோட்டில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

இரண்டு இணையான குறியிணைப்புக் கோடுகளைப் பயன்படுத்தியும்

$$\frac{f_1(u) + f_2(v)}{f_1(u) - f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குப் படம் 132 - இல் உள்ளதுபோல் நேம வரையம் அமைக்கலாம். u, v - அளவுகோல்கள் இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளின்மீது அமைக்கப்பட்டுள்ளன. w, t - அளவுகோல்கள் வேறிரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளின்மீது அமைக்கப்பட்டுள்ளன. u, v - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளி A ஆகும். w, t - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளி B ஆகும். u, t - அளவுகோல்கள் செல்லும் திசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் 45° ஆக இருக்கவேண்டும். இதேபோன்று v, w- அளவுகோல்கள் செல்லும் திசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணமும் 45° ஆக இருக்கவேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v - மதிப்புகளுக்கான CD என்ற குறியிணைப்புக்கோடும், w, t - மதிப்புகளுக்கான EF என்ற குறியிணைப்புக்கோடும் இணைகோடுகளாக இருக்க

வேண்டுமெனில் அளவுகோல் குணகங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன ?



படம் 132

$\angle BEF = \theta$ என்க. எனவே, $\angle ACD = \theta - 45°$.

$\triangle ACD$-இல் இருந்து,

$$\cot(\theta - 45°) = \frac{AC}{AD}$$

அதாவது $$\frac{1+\tan\theta}{\tan\theta - 1} = \frac{x}{y}$$

குறுக்குப் பெருக்கிச் சுருக்க $\tan\theta = \dfrac{x+y}{x-y}$

$\triangle BEF$ - இல் இருந்து $\tan\theta = \dfrac{BF}{BE}$

$$= \frac{z}{s}$$

ஆகவே, $$\frac{x+y}{x-y} = \frac{z}{s}$$

x, y, z, s என்பவற்றின் சார்பு மதிப்புகளைப் பதிலிட

$$\frac{m_1 f_1(u) + m_2 f_2(v)}{m_1 f_1(u) - m_2 f_2(v)} = \frac{m_3 f_3(w)}{m_4 f_4(t)}$$

இச் சமன்பாடு

$$\frac{f_1(u) + f_2(v)}{f_1(u) - f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்க வேண்டுமெனில் $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$ என்ற தொடர்புகள் இருக்க வேண்டும். வசதிக்காக A, B என்ற இரண்டு புள்ளிகளும் ஒன்றியிருக்குமாறு அளவுகோல்களை அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 48

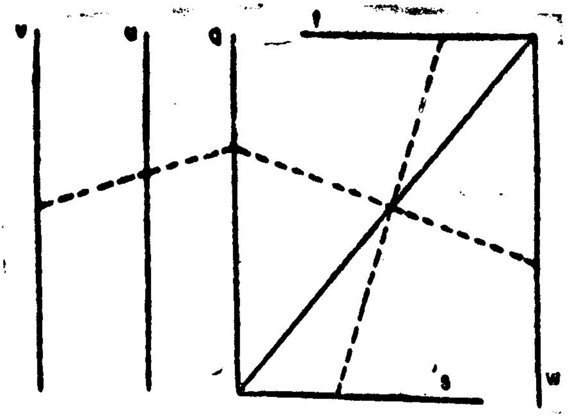
$\left(\frac{u-v}{2w}\right)$ $t = s^2$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. u (0 - 30); v (0 - 10); w (0-25); t (0 - 150); s (0 - 7). கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$u - v = q$$

அதாவது $v + q = u$ ... (1)

$$\frac{q}{2w} = \frac{s^2}{t} \quad (2)$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு படம் 133-இல் காட்டிய அமைப்பில் நேமவரையம் அமைக்கலாம்.



படம் 133

முதற் கட்டமாக

$$v + q = u$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கலாம். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$x = m_1 v$$
$$y = m_2 q$$
$$z = m_3 u$$

எனக் கொள்க. இங்கு $m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

v- யின் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_1 (10 - 0) = 10\, m_1$$

$m_1 = 1$ எனக் கொள்க, q - அளவுகோல் ஓர் இயக்குமையக் கோடாகப் பயன்படுகிறது. q - அளவுகோலின் மீது அளவுக் குறியீடுகள் தேவையில்லை ஆதலால், m_2 - இன் மதிப்பைத் தேர்தெடுத்துக் கொள்ளாமல், m_3 - இன் மதிப்பை வசதிக் கேற்பத் தேர்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். எனினும் m_2 -இன் மதிப்பை $m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ என்ற வாய்பாட்டிலிருந்து கண்டு பிடித்துக் கொள்ளவேண்டும். u - வின் சமன்யாட்டிலிருந்து

$$\text{அளவுகோல் நீளம்} = m_3 (30 - 0) = 30\, m_3$$

$m_3 = 0.4$ எனக் கொள்க. u, v - அளவுகோல்களின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கத் தேவை இல்லை என்பதையும், m_3 - இன் மதிப்பு m_1, m_2 - மதிப்புகளைவிடக் குறைவாக இருக்க வேண்டும் என்பதையும் நினைவிற் கொள்க. இப்பொழுது $0 \cdot 4 = \frac{m_2}{1 + m_2}$ எனவே, $m_2 = \frac{2}{3}$. u, q, v - அளவுகோல்களின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$x = v$$
$$y = \frac{2}{3} q$$
$$z = 0 \cdot 4\, u$$

ஆகும். இந்த அளவுகோல்களை மூன்று இணைகோடுகளின் மீது அமைக்கவும் (படம் 134). q - அளவுகோலின்மீது அளவுக் குறியீடுகள் தேவை இல்லை. u - அளவுகோல், v, q - அளவு

கோல்களுக்கிடையில் இருக்கவேண்டும். v, u - அளவுகோல்களின் இடைத்தூரத்திற்கும், u, q-அளவுகோல்களின் இடைத் தூரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் 3:2 ஆகும். இத்தூரங்களை முறையே 1.5 செ.மீ, 1 செ.மீ எனக் கொள்ளலாம்.

இரண்டாவது கட்டமாக

$$\frac{q}{2w} = \frac{s^2}{t}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தை அமைக்கலாம்.

$$v + q = u$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில் பயன்படுத்திய q – அளவுகோலையே

$$\frac{q}{2w} = \frac{s^2}{t}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்திலும் q - அளவு கோலாகப் பயன்படுத்தவேண்டும். அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$y = m_2\, q$$
$$x' = m_4\, (2w)$$
$$y' = m_5\, (s^2)$$
$$z' = m_6\, t$$

எனக் கொள்க. இங்கு

$$\frac{m_2}{m_4} = \frac{m_5}{m_6}$$

$m_4 = 0.2$, $m_5 = 0.1$ எனக் கொள்க. t - யின் நெடுக்கம் கொடுக்கப்பட்டிருந்தபோதினும், m_6 - இன் மதிப்பை $\frac{m_2}{m_4} = \frac{m_5}{m_6}$ என்ற தொடர்பிலிருந்துதான் கண்டுபிடித்துக் கொள்ள வேண்டும்.

$$m_6 = \frac{m_4\, m_5}{m_2}$$
$$= 0.03$$

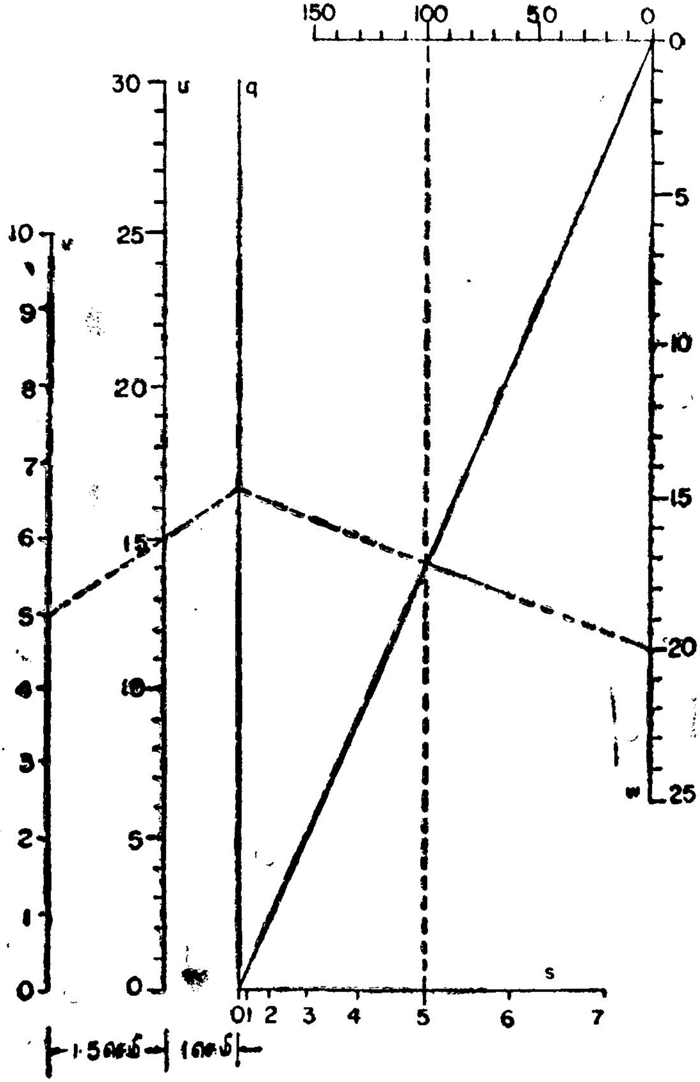
q, w, s, t - அளவுகோல்களின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$y = \frac{2}{3}q$$

$$x' = 0.4\,w$$

$$y' = 0.1\,s^2$$

$$z' = 0.03\,t$$



படம் 134

ஆகும். q, w - அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும் s, t-அளவுகோல்களை வேறிரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும் அமைக்கவேண்டும். q, s - அளவுகோல்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே இந்த இரண்டு அளவுகோல்களுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாக இருக்கவேண்டும். இதேபோன்று w, t, - அளவு கோல்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே இந்த இரண்டு அளவு கோல்களுக்கும் தொடக்கப் புள்ளியாக இருக்கவேண்டும். வசதிக் காக q, s- அளவுகோல்கள் செங்குத்தாக எடுத்துக்கொள்ளப் பட்டன. q - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கான அளவீடு 0 ஆகும். $u = 0$, $v = 0$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக்கோடு q - அச்சை வெட்டும் புள்ளிதான் $q = 0$ என்ற புள்ளியாகும். q, s - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியையும், w, t-அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்கோடு இயக்கு மையக் கோடாகப் பயன் படுகிறது.

அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் இரண்டு இயக்கு மையக்கோடுகள் உள்ளன. $v = 5$, $w = 20$, $t = 100$, $s = 5$ எனில், u - வின் மதிப்பைக் காணப் படத்தில் குறியிணைப்புக் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. $u = 15$ எனத் தெரிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 49

$$R_1 = \frac{R\,(E - E_1)}{E_1}$$ என்னும் வாய்பாட்டில்

R_1 = மின்கலத் தொகுதியின் (battery) உள்மின்தடை, (0 - 10) ஓம்

R = அளக்கும் சுற்றுவழியின் (measuring circuit) புறமின்தடை, (0 - 100) ஓம்

E = திறப்புச் சுற்றுவழி (open circuit) மின்னழுத்தம், (0 - 25) வோல்ட்டு

E_1 = முடிப்புச் சுற்றுவழி (closed circuit) மின்னழுத்தம், (0 - 25) வோல்ட்டு.

இவ் வாய்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$\frac{R_1}{R} = \frac{E}{E_1} - 1$$

என எழுதிக்கொள்ளலாம்.

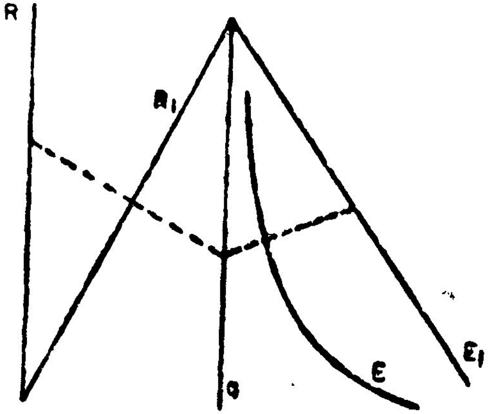
இச் சமன்பாட்டை

$$\frac{R_1}{R} = \frac{1}{q}$$

அதாவது $\frac{R}{q} = R_1$ ... (1)

$$\frac{1}{q} + \frac{(-E)}{E_1} = -1 \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற இரண்டு சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக்கொண்டு படம் 135 - ல் காட்டிய அமைப்பில் நேமவரையம் அமைக்கலாம்.



படம் 135

சமன்பாடு (1) - க்கு Z - விளக்கப்படம் அமைக்கலாம். R, q-அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின்மீது அமைத்து, R_1 - அளவுகோலை R, q - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின்மீது அமைக்கவேண்டும். R, q - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$x = m_1 R$$
$$y = m_2 q$$

எனக் கொள்க. R - இன் சமன்பாட்டிலிருந்து

அளவுகோல் நீளம் $= m_1 (100 - 0)$

$= 100\, m_1$

$m_1 = 0.1$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. R_1 - அளவுகோலை அமைக்க

$$x' = \left(\frac{dm_1}{m_2}\right) R_1$$

என்னும் R_1 - இன் துணையளவுகோலை R - அச்சின்மீது அமைக்க வேண்டும். R - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிதான் R_1 - இன் துணையளவுகோலுக்கும் தொடக்கப்புள்ளியாகும். d என்பது q - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளிக்கும் R_1 - அளவுகோலை அமைக்க q - அச்சின்மீது எடுத்துக்கொள்ளப்படும் நிலைப் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் ஆகும். $d = 10$, $m_2 = 1$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக்கொண்டால் R_1 - இன் துணையளவு கோலுக்குரிய குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$x' = R_1$$

ஆகும். இப்பொழுது துணையளவுகோலில் 0 முதல் 10 முடிய உள்ள அளவீடுகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறித்து, இப் புள்ளி களுக்கு q - அச்சின்மீது உள்ள நிலைப்புள்ளி வழியாக நேர் கோடுகள் வரைந்தால் இக் கோடுகள் R_1 - அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும் (படம் 136).

$$\frac{R}{q} = R_1$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தை அமைத்ததும்

$$\frac{1}{q} + \frac{(-E)}{E_1} = -1$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கவேண்டும். இச் சமன்பாடு

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{f_4(w)}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது எனலாம். இங்கு $f_1(u) = q$; $f_2(v) = E_1$; $f_3(w) = -1$; $f_4(w) = -E$. இச் சமன்பாட்டுக் குரிய நேமவரையத்தில் q, E_1 - அளவுகோல்களை இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோடுகளின்மீது அமைக்கவேண்டும். q, E_1 - அளவுகோல்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியே இவ்விரு அளவுகோல்களுக்கும் தொடக்கப் புள்ளி ஆகும். q - அளவுகோல்

முன்பே அமைக்கப்பட்டுள்ளது. E_1 - அளவுகோலின் அளவு கோல் சமன்பாட்டை

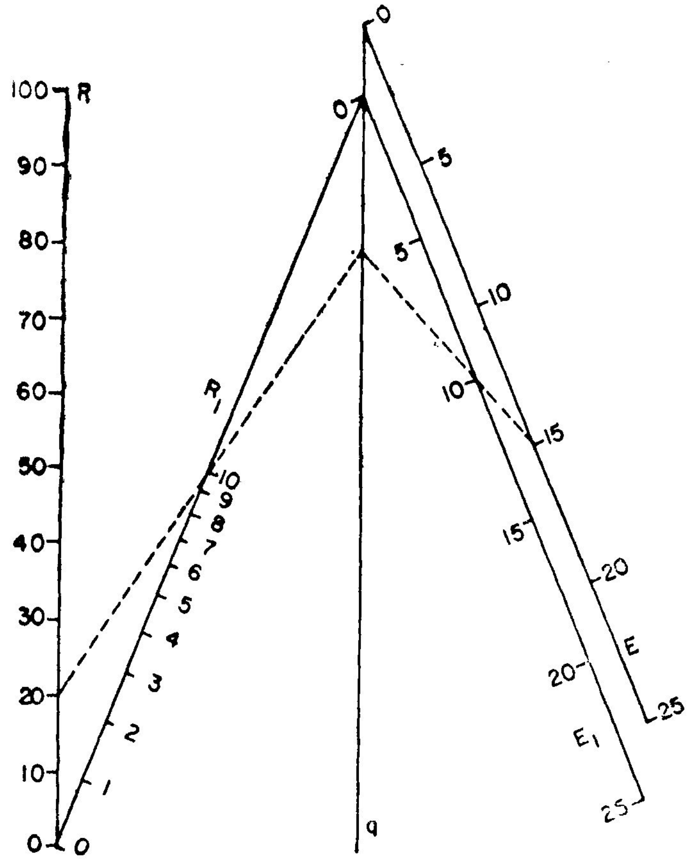
$$s = m_3 \; E_1$$

எனக் கொள்க. $m_3 = 0.4$ எனக் கொள்க. E - அளவுகோலை அமைப்பதற்கு z', z - ஆயங்களைப் பயன்படுத்தவேண்டும். z', z - ஆயங்களுக்கான வாய்பாடுகள் ஏழாம் அதிகாரத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$z' = m_2 (-1)$ அதாவது $z' = -1$

$z = m_3 (-1)(-E)$ அதாவது $z = 0.4 \; E$

z' - அச்சுத் தூரத்தை q - அளவுகோல் செல்லும் திசையிலும், z - அச்சுத் தூரத்தை E_1 - அளவுகோல் செல்லும் திசையிலும்,



படம் 136

q, E_1 - அளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளியிலிருந்து அளக்க வேண்டும். $z' = -1$ என்றிருப்பதால், q - அளவுகோலின் தொடக்கப்புள்ளிக்கு மேலே 1 செ.மீ. தூரத்தில் q - அச்சின் மீதுள்ள புள்ளி வழியாக E_1 - அச்சுக்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்கோடே E - அச்சாகும் எனத் தெரிகிறது. E - யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான z - மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு E - அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும்.

$R = 20$, $R_1 = 10$, $E = 15$ எனில் $E_1 = 10$ என்பதை அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் வரையப்பட்டுள்ள குறியிணைப்புக் கோடுகளிலிருந்து தெரிந்துகொள்ளலாம்.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு நேமவரையம் அமை (1 — 8).

1. $i = \dfrac{E_1 - E_2}{2R}$

i = மின்னோட்டம், ஆம்பியர்

E_1 = ஓர் இயந்திரத்தில் தூண்டப்பட்ட மின் இயக்கு விசை, (240 - 440) வோல்ட்டு

E_2 = மற்றோர் இயந்திரத்தில் தூண்டப்பட்ட மின் இயக்கு விசை, (240 - 440) வோல்ட்டு

R = மின்தடை, (20 - 25) ஓம்

2. $2ns = 5\,(c + p)$

n = விற்கப்பட்ட பொருள்களின் எண்ணிக்கை, (200 - 1000)

s = ஒரு பொருளின் விற்ற விலை, (10 - 50) ரூபாய்

c = விற்கப்பட்ட பொருள்களின் மொத்த அடக்க விலை, (500 - 18,000) ரூபாய்

p = மொத்த இலாபம், (500 - 6000) ரூபாய்.

3. $\log\left(\frac{a}{a_1}\right) = r\log\left(\frac{b}{b_1}\right)$

a (0.1 - 100) ; a_1 (0.001 - 100) ; b (0.1 - 100) ; b_1 (0.001 - 100) ; r (0.02 - 50).

4. $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

A = கூடுதல், (100 - 2600) ரூபாய்

P = அசல், (100 - 1000) ரூபாய்

r = கூட்டுவட்டி வீதம், (0 - 10) சதவீதம்

n = ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை, (0 - 10)

5. $x\sqrt{y} = x^2 - z + w^3(z - 4)$
x (0 - 4); y (1 - 4); z (3 - 6); w (1 - 2).

6. $y = \frac{Pl^3}{48EI}$

y = உத்தரத்தின் பெரும விலக்கம் (maximum deflection), செ.மீ.

P = சுமை, (250 - 5000) கி.கி.

l = உத்தரத்தின் நீளம், (150 - 750) செ.மீ.

E = மீட்சிக் குணகம், (15×10^4 - 25×10^5) கி.கி./செ.மீ.^{2}

I = நிலைமத் திருப்புத் திறன், (4×10^4 - 8×10^5) செ.மீ.^{4}

7. $P\left(\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}\right) = s$

P = அழுத்தம், (0 - 1200) கி.கி./செ.மீ.^{2}

s = தகைவு, (0 - 1500) கி.கி. / செ.மீ.^{2}

R = வெளி ஆரம், (0 - 30) செ.மீ.

r = உள் ஆரம், (0 - 10) செ.மீ.

8. $\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

f = குவியத்தூரம், (0 – 25) செ.மீ.

μ = ஒளிவிலகல் எண் (refractive index), (1.5 - 1.7)

R_1 = வளைவு ஆரம் (radius of curvature), (0 - 12) செ. மீ.

R_2 = வளைவு ஆரம், (0 - 12) செ. மீ.

9. வட்ட நேமவரையங்கள்

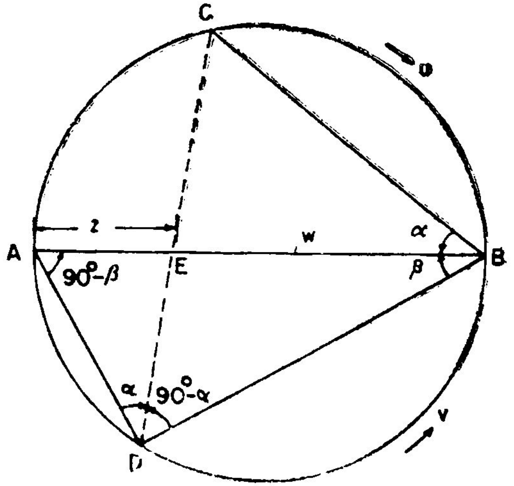
(CIRCULAR NOMOGRAMS)

85. $f_1(u)\, f_2(v) = f_3(w)$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

அதிகாரம் நான்கில்

$$f_1(u)\, f_2(v) = f_3(w)$$

என்ற வகைச் சமன்பாட்டுக்கு Z - விளக்கப்படம் அமைக்கப் பட்டது. அதிகாரம் மூன்றில் இச் சமன்பாட்டுக்கு இணையளவு கோல் நேமவரையம் அமைக்கலாம் எனச் சொல்லப்பட்டது. இச் சமன்பாட்டுக்கு வட்ட வடிவத்திலும் நேமவரையம் அமைக்க லாம். இதற்கு ஒரு வட்டப் பரிதியின் மேற்பாதியின்மீது *u*-அளவு கோலையும், கீழ்ப்பாதியின்மீது *v* - அளவுகோலையும் கிடை விட்டத்தின் (horizontal diameter) மீது *w* - அளவுகோலையும் படம் 137 - இல் காட்டியவாறு அமைக்கவேண்டும்.



படம் 137

u, v, w-அளவுகோல்கள் மூன்றுக்கும் *A* என்ற புள்ளியே தொடக்கப்புள்ளி ஆகும். *u, v* - அளவுகோல்கள் வட்ட அளவு

கோல்களாக (circular scales) இருப்பதால், இவ்விரு அளவுகோல்களையும் அமைக்கக் கோண அளவையைப் (angular measurement) பயன்படுத்தவேண்டும். சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள u, v, w - மதிப்புகள் ஒரே நேர்கோட்டின்மீது அமைய வேண்டுமெனில், அளவுகோல் சமன்பாடுகள் எப்படி இருக்க வேண்டும் எனக் காணலாம். u, v - மதிப்புகளை இணைக்கும் CD என்ற குறியிணைப்புக்கோடு AB - ஐ E என்ற புள்ளியில் வட்டட்டும்.

$\angle ABC = \alpha$ என்க.

$\angle ABD = \beta$ என்க.

$AE = z$ என்க.

வட்டத்தின் ஆரத்தை r செ.மீ. எனக் கொள்க.

வட்டத்தின் பொதுப் பண்புகளிலிருந்து

$$\angle BAD = 90° - \beta$$

$$\angle ADE = \alpha$$

$$\angle BDE = 90° - \alpha$$

$\triangle ADE$ - யிலிருந்து

$$\frac{AE}{\sin \alpha} = \frac{DE}{\sin (90° - \beta)}$$

அதாவது $$\frac{AE \cos \beta}{\sin \alpha} = DE$$

$\triangle BDE$ - யிலிருந்து

$$\frac{BE}{\sin (90° - \alpha)} = \frac{DE}{\sin \beta}$$

அதாவது $$\frac{BE \sin \beta}{\cos \alpha} = DE$$

எனவே $$\frac{AE \cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{BE \sin \beta}{\cos \alpha}$$

அதாவது $$\frac{AE}{BE} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$$

அதாவது $\frac{z}{2r - z} = \tan\alpha \tan\beta$

இப்பொழுது $\tan\alpha = m_1 f_1(u)$

$$\tan\beta = m_2 f_2(v)$$

$$\frac{z}{2r - z} = m_3 f_3(w)$$

அதாவது $z = \frac{2r\, m_3 f_3(w)}{1 + m_3 f_3(w)}$

எனக் கொள்க. எனவே, $m_3 f_3(w) = m_1 f_1(u)\, m_2 f_2(v)$ இச் சமன்பாடு

$$f_1(u)\, f_2(v) = f_3(w)$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்

$$m_1 m_2 = m_3$$

ஆகவே, $f_1(u) f_2(v) = f_3(w)$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு வட்ட நேமவரையம் அமைக்கவேண்டுமெனில்

$$\tan\alpha = m_1 f_1(u)$$

என்ற u - அளவுகோலை வட்டப் பரிதியின் மேற்பாதியின்மீதும்

$$\tan\beta = m_2 f_2(v)$$

என்ற v - அளவுகோலை வட்டப் பரிதியின் கீழ்ப்பாதியின்மீதும்

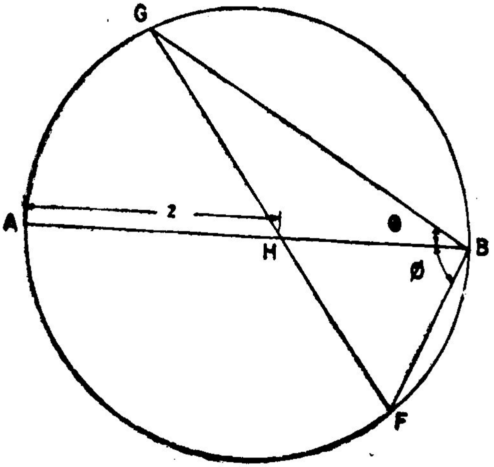
$$z = \frac{2r\, m_3 f_3(w)}{1 + m_3 f_3(w)}$$

என்ற w - அளவுகோலைக் கிடைவிட்டத்தின்மீதும் அமைக்க வேண்டும். m_1, m_2, m_3 - மதிப்புகளை $m_1 m_2 = m_3$ என்றிருக்குமாறு தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். w - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளியான A - இல் $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

u, v-அளவுகோல்களை முறையே வட்டப் பரிதியின் கீழ்ப்பாதி, மேற்பாதி இவற்றின்மீதும் அமைத்துக்கொள்ளலாம்.

w - அளவுகோலை அமைக்க w - வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான z - மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளவேண்டும். z - மதிப்புகளைக் கணக்கிடாமல் கீழே விளக்கியவாறு துணையளவு

கோலின் உதவியாலும் w - அளவுகோலை அமைக்கலாம். $\angle ABF = \phi$ என்றிருக்குமாறு F என்னும் நிலைப்புள்ளியை v - அச்சின்மீது எடுத்துக் கொள்க. F வழியாக வரையப்பட்ட ஒரு நேர்கோடு u - அச்சை G என்ற புள்ளியிலும், v - அச்சை H என்ற புள்ளியிலும் வெட்டட்டும் (படம் 138). $\angle ABG = \theta$ என்க. AH என்பது z என்பதற்குச் சமமாக இருக்கவேண்டுமெனில், θ - வின் மதிப்பு என்னவெனக் காணலாம். படம் 137 – இல் நிறுவியதுபோன்று,



படம் 138

படம் 138 - இல்

$$\frac{z}{2r - z} = \tan\theta \tan\phi$$

என நிறுவலாம். எனவே,

$$\tan\theta \tan\phi = m_3 f_3(w)$$

அதாவது $\tan\theta = m_3 \cot\phi f_3(w)$

ஆகவே, $\tan\theta = m_3 \cot\phi f_3(w)$

என்னும் w - வின் துணையளவுகோலை, u - அச்சின்மீது அமைத்து F என்ற நிலைப்புள்ளிவழியே துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு நேர்கோடுகள் வரைந்தால் இக் கோடுகள் w - அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும்.

$$\tan \alpha = m_1 f_1(u)$$

$$\tan \beta = m_2 f_2(v)$$

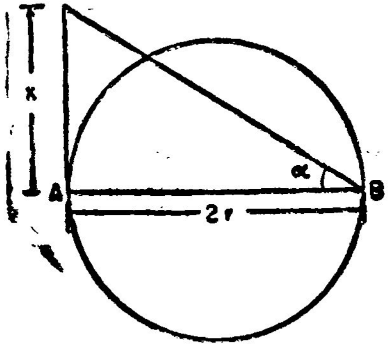
$$\tan \theta = m_3 \cot \phi f_3(w)$$

என்ற அளவுகோல்களை அமைக்க u, v, w இவற்றின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான α, β, θ - மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுக்கொள்ள வேண்டும். இவற்றைக் கணக்கிடாமலும் மேற்சொன்ன அளவு கோல்களை அமைக்கலாம்.

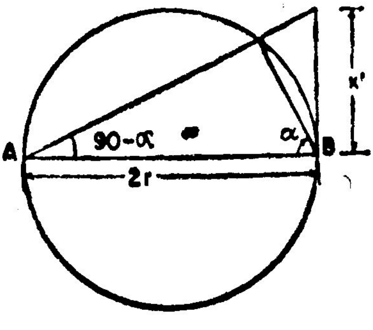
A என்ற புள்ளியைத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு

$$x = 2r\, m_1 f_1(u)$$

என்ற u - வின் துணையளவுகோலை, A என்ற புள்ளியில் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின்மீது, கீழிருந்து மேலாக அமைத்துக்கொள்க (படம் 139). இந்த அளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு B வழியாக நேர்கோடுகள் வரைந்தால், இக் கோடுகள் u - அளவுகோலை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும்.



படம் 139



படம் 140

படம் 139 - இல்

$$\tan \alpha = \frac{x}{2r}$$

அதாவது $m_1 f_1(u) = \dfrac{x}{2r}$

எனவேதான் u - அளவுகோலை அமைக்க

$$x = 2r\, m_1 f_1(u)$$

என்ற துணையளவுகோலை A - யில் உள்ள தொடுகோட்டின்மீது அமைக்கவேண்டும்.

u - அளவுகோலில், இடது பாதியின்மீது அளவீடுகள் செய்யவே இத் துணையளவுகோல் பெரிதும் பயன்படும். இதே துணையளவுகோலின் உதவியால் வலதுபாதியின்மீதும் அளவீடுகள் செய்யலாம். ஆனல், இதற்குத் துணையளவுகோலின் நீளம் மிகுந்து தேவைப்படும். u - அளவுகோலின்மீது குறிக்கவேண்டிய அளவுக் குறியீடு B - யை நெருங்க நெருங்க, துணையளவு கோலின் நீளம் மிகுந்துகொண்டே செல்லும். எனவே, u - அளவு கோலின் வலதுபாதியை அமைக்க B என்ற புள்ளியைத் தொடக்கப்புள்ளியாகக் கொண்டு

$$x' = \frac{2r}{m_1 f_1(u)}$$

என்ற u - வின் துணையளவுகோலை, B - யில் உள்ள தொடு கோட்டின்மீது கீழிருந்து மேலாக அமைத்துக் கொள்க (படம் 140). இந்த அளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு A - வழியாக நேர்கோடுகள் வரைந்தால் இக் கோடுகள் u அளவு கோலை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும். படம் 140 - இல்

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{x'}{2r}$$

$$\text{அதாவது} \qquad \cot\alpha = \frac{x'}{2r}$$

$$\text{அதாவது} \qquad \frac{1}{m_1 f_1(u)} = \frac{x'}{2r}$$

எனவேதான் u - அளவுகோலை அமைக்க

$$x' = \frac{2r}{m_1 f_1(u)}$$

என்ற துணையளவுகோலை, B – யில் உள்ள தொடுகோட்டின்மீது அமைக்கவேண்டும்.

இதேபோன்று v - அளவுகோலின் இடதுபாதியை அமைக்க A - ஐத் தொடக்கப்புள்ளியாகக் கொண்டு

$$y = 2r\, m_2 f_2(v)$$

என்ற v - யின் துணையளவுகோலை, A - யில் உள்ள தொடு கோட்டின்மீது மேலிருந்து கீழாக அமைக்கவேண்டும். வலது பாதியை அமைக்க B - யைத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்

$$y' = \frac{2r}{m_2 f_2(v)}$$

என்ற v - யின் துணையளவுகோலை B - யில் உள்ள தொடு கோட்டின்மீது மேலிருந்து கீழாக அமைக்கவேண்டும்.

$$\tan\theta = m_3 \cot\phi\, f_3(w)$$

என்ற w - வின் துணையளவுகோலை u - அச்சின்மீது அமைப்பதற்கு

$$s = 2r\, m_3 \cot\phi\, f_3(w)$$

என்ற துணையளவுகோலை A - யில் உள்ள தொடுகோட்டின்மீதும்

$$s' = \frac{2r}{m_3 \cot\phi\, f_3(w)}$$

என்ற துணையளவுகோலை B - யில் உள்ள தொடுகோட்டின்மீதும் அமைக்கவேண்டும். இவ்விரு அளவுகோல்களும் கீழிருந்து மேலாகச் செல்லும். இவற்றின் தொடக்கப்புள்ளிகள் முறையே A, B ஆகும்.

இவ்வாறு

$$f_1(u)\, f_2(v) = f_3(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு வட்ட நேமவரையம் அமைப்பதெனில் பல்வேறு துணையளவுகோல்களின் உதவி தேவைப்படுகிறது; அல்லது பல்வேறு கணக்கீடுகளைச் செய்யவேண்டும். எனவே, இவ்வகைச் சமன்பாட்டுக்கு வட்ட நேமவரையத்தைக் காட்டிலும் Z - விளக்கப்படமே ஏற்றது. எனினும்,

$$f_1(u)\, f_2(v) = f_3(w)$$

என்ற அமைப்பில் உள்ள கோண கணிதச் சமன்பாடுகள் (trigonometric equations) சிலவற்றிற்கு, வட்ட நேமவரையம் அமைப்பது எளிதாகும். ஏனெனில், துணையளவுகோல்களின் உதவி இதற்கு மிகுந்து தேவைப்படாது.

எடுத்துக்காட்டு 50

$w^2 = (u - 1)\, v$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு வட்ட நேம வரையம் அமை. $u\,(1 - 5)$; $v\,(0 - 25)$.

வட்டத்தின் ஆரத்தை 3 செ.மீ. என எடுத்துக்கொள்க. வட்டத்தின் கிடைவிட்டத்தை AB என்க (படம் 141). u, v - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$\tan\alpha = m_1 (u - 1)$$

$$\tan \beta = m_2 v$$

எனக் கொள்க. u - அளவுகோலை அமைக்க

$$x = 2r\, m_1 \,(u - 1)$$

$$x' = \frac{2r}{m_1 (u - 1)}$$

என்ற துணையளவுகோல்களை முறையே A, B என்ற புள்ளிகளில் உள்ள தொடுகோடுகளின்மீது மேல்நோக்கிச் செல்லுமாறு அமைக்கவேண்டும். $m_1 = \frac{1}{2}$ எனக் கொள்க. இப்பொழுது u - வின் குறைவான மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறிக்க

$$x = 3\,(u - 1)$$

என்ற துணையளவுகோலையும், u - வின் உயர்ந்த மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறிக்க

$$x' = \frac{12}{u - 1}$$

என்ற துணையளவுகோலையும் பயன்படுத்திக்கொள்ளவேண்டும். மேற்சொன்ன இரு துணையளவுகோல்களின் தொடக்கப்புள்ளிகள் முறையே A, B ஆகும். $m_2 = \frac{1}{10}$ எனக் கொள்க. இப்பொழுது v – யின் குறைவான மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறிக்க

$$y = 2r\, m_2\, v$$

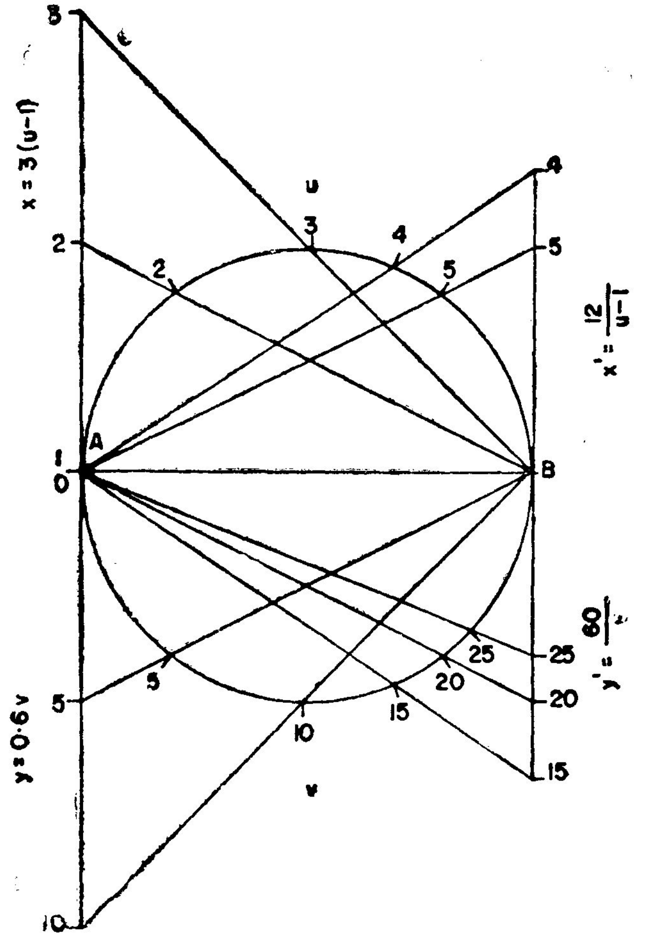
அதாவது $y = 0.6\, v$

என்ற துணையளவுகோலை A - ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, A - யில் உள்ள தொடுகோட்டின்மீது கீழ்நோக்கிச் செல்லுமாறும், v - யின் உயர்ந்த மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளைக் குறிக்க

$$y' = \frac{2r}{m_2\, v}$$

அதாவது $y' = \frac{60}{v}$

என்ற துணையளவுகோலை B - ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, B - யில் உள்ள தொடுகோட்டின்மீது கீழ்நோக்கிச் செல்லுமாறும் அமைத்துப் பயன்படுத்திக் கொள்ளவேண்டும்.



படம் 141

u, *v* - அளவுகோல்களை அமைக்கும் முறை படம் 141 - இல் விளக்கப்பட்டுள்ளது. *u*, *v* - அளவுகோல்களை அமைத்து முடித்ததும் அதை அமைக்கப் பயன்படுத்திய துணையளவு கோல்களையும், துணையளவுகோலின் அளவுக்குறியீடுகள் வழியாக வரைந்த நேர்கோடுகளையும் துடைத்தழித்துவிடலாம்.

இனி, *w* - அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும். *w* - வின் பெருமம் $\sqrt{(5-1)\,25}$ அதாவது 10 ஆகும். எனவே *w* - அளவுகோலில் 0 முதல் 10 முடிய அளவீடு செய்துகொள்ளவேண்டும். *w* - அளவுகோலை அமைக்க *u* - அச்சின்மீது

$$\tan\theta = m_3 (\cot\phi)\, w^2$$

என்ற w - வின் துணையளவுகோலை அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும். வசதிக்காக $\phi = 45°$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. $\angle ABF = \phi$ என்று இருக்குமாறு, v - அச்சின்மீது F என்ற நிலைப்புள்ளியைக் குறித்துக்கொள்ளவேண்டும். u - அச்சின்மீது அமைக்கப்படும் w - வின் துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு F வழியாக நேர்கோடுகள் வரைந்தால் இக் கோடுகள் கிடைவிட்டத்தை அதாவது w - அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும். $m_1 m_2 = m_3$ என்பதால் $m_3 = \frac{1}{20}$. எனவே, u - அச்சின்மீது அமைக்கப்படும் w - வின் துணையளவு கோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$\tan\theta = \frac{1}{20}\, w^2$$

ஆகும். இந்தத் துணையளவுகோலை அமைக்க

$$s = 2r\left(\frac{1}{20}\, w^2\right)$$

அதாவது $s = 0 \cdot 3\, w^2$

என்ற அளவுகோலை A - ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, A - யில் உள்ள தொடுகோட்டின்மீது மேல் நோக்கிச் செல்லுமாறும்

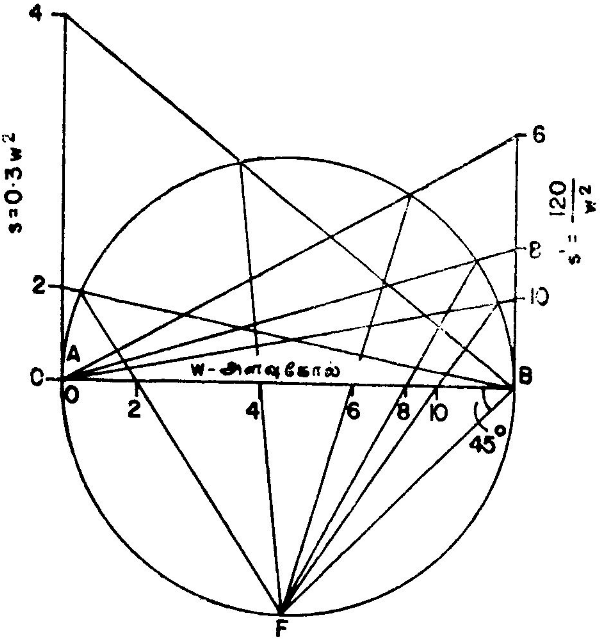
$$s' = \frac{2r}{\frac{1}{20}\, w^2}$$

அதாவது $s' = \frac{120}{w^2}$

என்ற அளவுகோலை B - ஐத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கொண்டு, B - யில் உள்ள தொடுகோட்டின்மீது மேல்நோக்கிச் செல்லு மாறும் அமைத்துப் பயன்படுத்திக்கொள்ளவேண்டும். w - அளவு கோலை அமைக்கும் முறை படம் 142 - இல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இம்முறையில் w - அளவுகோலின் துணையளவுகோலை அமைப் பதற்கே வேறு சில துணையளவுகோல்களின் உதவி தேவைப் படுவதால், w - அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நேரடியாகவே கிடைவிட்டத்தின்மீது w - அளவு

கோலை அமைத்துவிடலாம். w - அளவுகோலின் அளவுகோல் சமன்பாடு

$$z = \frac{2r\, m_3\, w^2}{1 + m_3\, w^2}$$



படம் 142

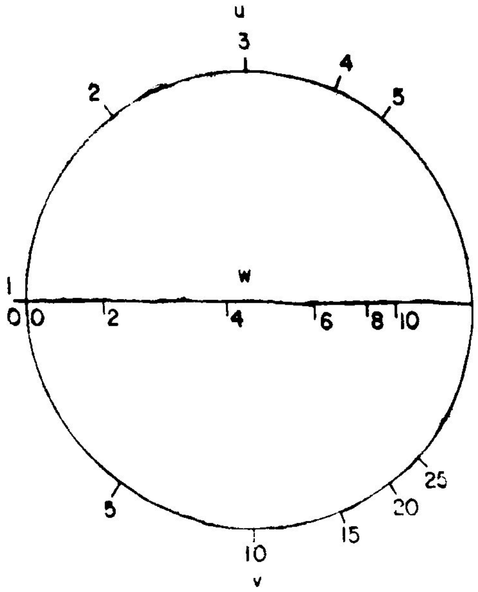
ஆகும். $r = 3,\ m_3 = \frac{1}{20}$ என்பதால் w - அளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$z = \frac{6\, w^2}{20 + w^2}$$

ஆகும். இதைப் பயன்படுத்தி w - வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான z - மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளவேண்டும் (அட்டவணை 30).

அட்டவணை 30

w	0	2	4	6	8	10
$\frac{6w^2}{20+w^2}$	0	1	2.67	3.86	4.57	5



படம் 143

அட்டவணையின் இரண்டாவது நிரையில் (row) உள்ள எண்கள் $w = 0$ என்ற அளவீட்டிலிருந்து மற்ற அளவீடுகளுக்குள்ள தூரங்கள் ஆகும். w - அளவுகோலின் தொடக்கப் புள்ளி A என்பதை நினைவிற் கொள்க. செ.மீ., மி.மீ. அளவுகள் குறிக்கப் பட்ட சீர் அளவுகோலைப் பயன்படுத்தி w - அளவுகோலை அமைக்கலாம். அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையம் படம் 143 - இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 51

$\frac{\tan u}{\tan v} = \tan w$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. $u\ (0° - 90°)$; $v\ (0° - 90°)$; $w\ (0° - 90°)$

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\tan u \cot v = \tan w$$

என்ற அமைப்பில் எழுதிக் கொள்க. u, v - அளவுகோல்களின் அளவுகோல் சமன்பாடுகளை முறையே

$$\tan \alpha = m_1 \tan u$$

$$\tan \beta = m_2 \cot v$$

எனக் கொள்க. வசதிக்காக $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ எனக் கொள்க. எனவே, u, v – அளவுகோல்களின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$\alpha = u$$

$$\beta = 90 - v$$

இந்த அளவுகோல்களைக் கோண அளவியின் உதவியால் மிக விரைவில் அமைத்துவிடலாம் (படம் 144), w - அளவுகோலை அமைக்க, u - அச்சின் மீது

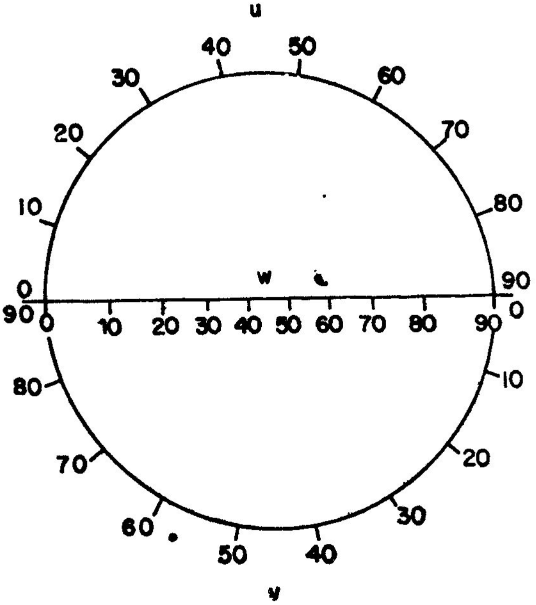
$$\tan \theta = m_3 \cot \phi \tan w$$

என்ற w-வின் துணையளவுகோலை அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். $m_1 m_2 = m_3$ என்பதால் $m_3 = 1$. வசதிக்காக $\phi = 45°$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. எனவே, u - அச்சின்மீது அமைக்கப்படும் w - வின் துணையளவுகோலின் குறியீட்டுச் சமன்பாடு

$$\tan \theta = \tan w$$

அதாவது $\theta = w$

ஆகும். இந்த அளவுகோலைக் கோண அளவியின் உதவியால் மிக எளிதில் அமைத்துவிடலாம். u - அளவுகோலும், u - அச்சின்மீது அமைக்கப்படும் w - வின் துணையளவுகோலும் இக் கணக்கில் முழுதொத்தனவாக இருப்பதைப் பார்க்கலாம். $\phi = 45°$ ஆதலால், $\angle ABF = 45°$ என்றிருக்குமாறு v - அச்சின்மீது F என்ற நிலைப்புள்ளியைக் குறித்துக்கொள்ளவேண்டும். u-அச்சின் மீது அமைக்கப்பட்ட w - வின் துணையளவுகோலின் அளவுக் குறியீடுகளுக்கு F வழியாக நேர்கோடுகள் வரைந்தால் இக் கோடுகள் w - அச்சை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும். u, v, w - அளவுகோல்களை அமைக்க வட்டத்தின் ஆரம் பயன்படுத்தபடவே இல்லை. எனவே, வட்டத்தின் ஆரத்தை எதுவாக வேண்டு மானாலும் எடுத்துக்கொண்டு நேமவரையத்தை அமைக்கலாம்.



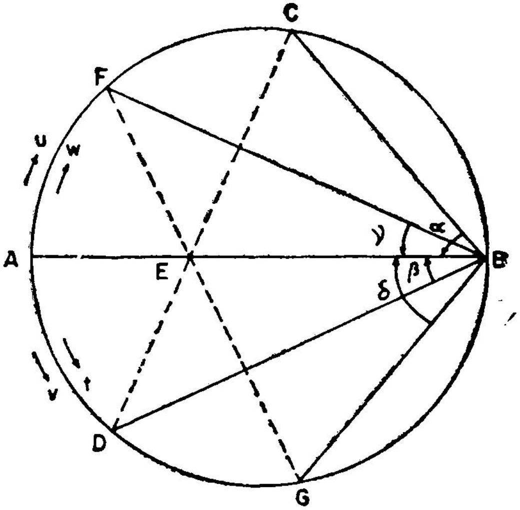
படம் 144

$\frac{\tan u}{\tan v} = \tan w$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு Z - விளக்கப்படமோ இணையளவுகோல் நேமவரையமோ அமைத்தால் கணக்கீட்டு வேலை மிகுதியாக இருக்கும். எனவே, இச் சமன்பாட்டுக்கு வட்ட நேமவரையம் அமைப்பதே எளிது.

36. $f_1(u)\, f_2(v) = f_3(w)\, f_4(t)$ என்ற வகைச் சமன்பாடு

இவ் வகைச் சமன்பாட்டுக்கு நான்காம் அதிகாரத்திலும், ஐந்தாம் அதிகாரத்திலும் பல்வேறு அமைப்புகளில் நேமவரையம் அமைத்தது நினைவிருக்கலாம். இச் சமன்பாட்டுக்கு வட்ட நேமவரையமும் அமைக்கலாம். இதற்கு ஒரு வட்டப் பரிதியின் மேற்பாதியின் வெளிப்பக்கத்தில் u - அளவுகோலையும், உட்பக்கத்தில் w - அளவுகோலையும், கீழ்ப்பாதியின் வெளிப்பக்கத்தில் v - அளவுகோலையும், உட்பக்கத்தில் t - அளவுகோலையும் படம் 145 - இல் காட்டியவாறு அமைக்கவேண்டும். A என்ற புள்ளியில் $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. இந் நேமவரையத்தில் AB என்னும் கிடைவிட்டம் இயக்கு மையக் கோடாகப் பயன் படுகிறது. சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் உள்ள

u, v - மதிப்புகளை இணைக்கும் CD என்ற குறியிணைப்புக்கோடும், w, t - மதிப்புகளை இணைக்கும் FG என்ற குறியிணைப்புக் கோடும் AB என்னும் கிடைவிட்டத்தின்மீது வெட்டிக்கொள்ள வேண்டு மெனில் அளவுகோல் சமன்பாடுகள் எப்படி இருக்கவேண்டும் எனக் காணலாம்.



படம் 145

படம் 137-இல் நிறுவியதுபோல, படம் 145-இல்

$$\frac{AE}{BE} = \tan\alpha \ \tan\beta$$

$$\frac{AE}{BE} = \tan\gamma \ \tan\delta$$

என நிறுவலாம். எனவே,

$$\tan\alpha \tan\beta = \tan\gamma \ \tan\delta$$

இப்பொழுது

$$\tan\alpha = m_1 f_1(u)$$

$$\tan\beta = m_2 f_2(v)$$

$$\tan\gamma = m_3 f_3(w)$$

$$\tan\delta = m_4 f_4(t)$$

எனக் கொள்க. எனவே,

$$m_1 f_1 (u)\ m_2 f_2 (v) = m_3 f_3 (w)\ m_4 f_4 (t)$$

இச் சமன்பாடு

$$f_1 (u) f_2 (v) = f_3 (w) f_4 (t)$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்கவேண்டுமெனில்

$$m_1 m_2 = m_3 m_4$$

எனவே $$f_1 (u) f_2 (v) = f_3 (w) f_4 (t)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு வட்ட நேமவரையம் அமைக்க வேண்டுமெனில்,

$$tan\ \alpha = m_1 f_1 (u)$$

என்ற u-அளவுகோலை வட்டப்பரிதியின் மேற்பாதியில் வெளிப்பக்கத்தின் மீதும்

$$tan\ \beta = m_2 f_2 (v)$$

என்ற v-அளவுகோலை வட்டப்பரிதியின் கீழ்ப்பாதியில் வெளிப்பக்கத்தின் மீதும்

$$tan\ \gamma = m_3 f_3 (w)$$

என்ற w-அளவுகோலை வட்டப்பரிதியின் மேற்பாதியில் உட்பக்கத்தின் மீதும்

$$tan\ \delta = m_4 f_4 (t)$$

என்ற t - அளவுகோலை வட்டப்பரிதியின் கீழ்ப்பாதியில் உட்பக்கத்தின் மீதும் அமைக்கவேண்டும். m_1, m_2, m_3, m_4 இவற்றின் மதிப்புகளை $m_1 m_2 = m_3 m_4$ என்றிருக்குமாறு தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

u, v-அளவுகோல்களில் ஏதேனும் ஒன்றை வட்டப்பரிதியின் மேற்பாதியின் மீதும் மற்றொன்றைக் கீழ்ப்பாதியின் மீதும் அமைத்துக் கொள்ளலாம். இதே போன்று, w, t - அளவுகோல்களில் ஏதேனும் ஒன்றை வட்டப்பரிதியின் மேற்பாதியின் மீதும் மற்றொன்றைக் கீழ்ப்பாதியின் மீதும் அமைத்துக் கொள்ளலாம். எந்த அமைப்பில் அளவுகோல்களை அமைத்துக் கொண்டாலும் குறியிணைப்புக் கோடுகளை வரையும்பொழுது

u, v- மதிப்புகளுக்கு ஒரு குறியிணைப்புக்கோடும், w, t- மதிப்புகளுக்கு மற்றொரு குறியிணைப்புக்கோடும் வரையவேண்டும்.

$$f_1(u) f_2(v) = f_3(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய வட்ட நேமவரையத்தில், u, v- அளவுகோல்களை அமைக்க, இரண்டு நிலைக்குத்தான தொடுகோடுகளின் மீது அமைக்கப்பட்ட துணையளவுகோல்கள் பயன்படுத்தப் பட்டன அல்லவா ? அதேபோல

$$f_1(u) f_2(v) = f_3(w) f_4(t)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய வட்ட நேமவரையத்தில், u, v, w, t - அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றையும் இரண்டு துணையளவுகோல் களின் உதவியால் அமைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 52

$$u \tan 2v = \sin w \cot \left(\frac{t}{2}\right)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. $u\ (1 - 4)$; $v\ (10° - 45°)$; $w\ (0° - 90°)$; $t\ (0° - 120°)$.

அளவுகோல் சமன்பாடுகளை

$$\tan \alpha = m_1 u$$

$$\tan \beta = m_2 \tan 2v$$

$$\tan \gamma = m_3 \sin w$$

$$\tan \delta = m_4 \cot \left(\frac{t}{2}\right)$$

எனக் கொள்க. v, t-அளவுகோல்களை மிக எளிதில் அமைப்பதற் கேற்ப $m_2 = m_4 = 1$ எனக் கொள்க. எனவே v, t-அளவுகோல் களின் குறியீட்டுச் சமன்பாடுகள் முறையே

$$\tan \beta = \tan 2v$$

அதாவது $\beta = 2v$

$$\tan \delta = \cot \left(\frac{t}{2}\right)$$

அதாவது $\delta = 90 - \dfrac{t}{2}$

ஆகும். *v*, *t*-அளவுகோல்களை அமைக்கத் துணையளவுகோல்களின் உதவி தேவையில்லை. கோண அளவியின் உதவியே போதும். ஆனால் *u*, *w*-அளவுகோல்களை அமைக்கத் துணையளவுகோல்களின் உதவி தேவைப்படுகிறது. வட்டத்தின் ஆரத்தை 3 செ. மீ. எனக் கொள்க. எனவே *u*-அளவுகோலை அமைக்க

$$x = 6m_1u$$
$$x' = \left(\frac{6}{m_1u}\right)$$

என்ற துணையளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தவேண்டும். $m_1 = 1$ எனத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்க. $m_1m_2 = m_3m_4$ என்பதால் $m_4 = 1$. *w*-அளவுகோலை அமைக்க

$$y = 6 \sin w$$

என்ற ஒரு துணையளவுகோலின் உதவியே போதுமானது. இந்தத் துணையளவுகோலை அமைக்க, *w*-வின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான *y*-யின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டுக் கொள்ளவேண்டும் (அட்டவணை 31).

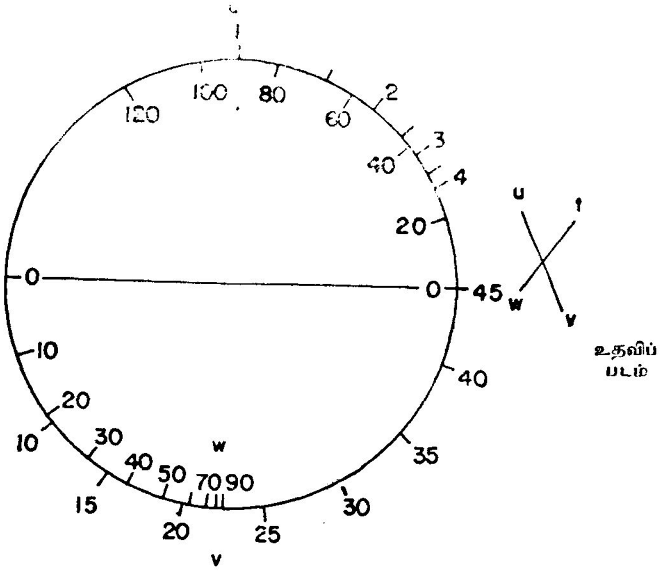
அட்டவணை-31

w (பாகை)	6 sin *w*	*w* (பாகை)	6 sin *w*
0	0	50	4.5960
10	1.0416	60	5 1960
20	2.0520	70	5.6382
30	3.0000	80	5.9088
40	3.8568	90	6.0000

u, *w*-அளவுகோல்கள் இரண்டையும் வட்டப்பரிதியின் மேற்பாதியின் மீது அமைத்தால்

$$x = 6\,u$$
$$y = 6 \sin w$$

என்ற இரண்டு துணையளவுகோல்களையும் ஒரே நேர்கோட்டின் மீது அமைக்க நேரிடுகிறது. எனவே *u*-அளவுகோலை முதலில் அமைத்து அதை அமைக்கப் பயன்படுத்திய துணையளவுகோல்களைத் துடைத்தழித்துவிடவேண்டும். பின்னர் *w*-அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும்.



படம் 146

வசதிக்காக *u*-அளவுகோலை வட்டப்பரிதியின் மேற்பாதியின் மீதும் *w*-அளவுகோலை வட்டப்பரிதியின் கீழ்ப்பாதியின் மீதும் அமைத்துக்கொள்ளலாம். இவ்வாறு அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையம் படம் 146-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு வட்ட நேமவரையம் அமை (1-9).

1. $uv = w$

$u\ (0 - 25)\ ;\ v\ (0 - 20)$

2. $u^2(v+1) = w+100$

$u\ (0 - 10)\ ;\ v\ (0 - 4)$

3. $\tan u \sin v = \tan w$

$u\,(0^\circ - 90^\circ)$: $v\,(0^\circ - 90^\circ)$; $w\,(0^\circ - 90^\circ)$

4. $\sec \theta \tan \phi = \cot t$

$\theta\,(0^\circ - 90^\circ)$; $\phi\,(0^\circ - 90)$; $t\,(0^\circ - 90^\circ)$

5. $R = 100 \cot \theta_1 \cot \theta_2$

R = ஒளியளவியின் (*photometer*) வேறுபாட்டு விகிதம் (contrast ratio), $(3 - 72)\%$

θ_1 = ஒளியளவியில் உள்ள ஓர் அளவு, $(50^\circ - 80^\circ)$

θ_2 = ஒளியளவியில் உள்ள மற்றோர் அளவு, $(10^\circ - 40^\circ)$

6. $V = \frac{\pi}{3} r^3 \cot \phi$

V = கூம்பின் கன அளவு, செ.மீ.^{3}

r = கூம்பின் ஆரம், $(0 - 20)$ செ. மீ.

ϕ = கூம்பின் அரைஉச்சிக் கோணம் (semi - vertical angle), $(0^\circ - 45^\circ)$

7. $\mu = \frac{\sin i}{\sin r}$

μ = ஒளிவிலகல் எண்

i = படுகோணம் (angle of incidence), $(0^\circ - 90^\circ)$

r = விலகுகோணம் (angle of refraction), $(0^\circ - 90^\circ)$

8. $uv^2 = w\sqrt{t}$

$u\,(0 - 10)$; $v\,(0 - 10)$; $w\,(0 - 100)$; $t\,(0 - 100)$

9. $\tan n \tan\left(\frac{v}{2}\right) \cot 3w = \cot\left(\frac{t}{3}\right)$

வசதிக்கேற்ப நெடுக்கங்களை எடுத்துக்கொள்க.

10. அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையங்கள்

(Nomograms in Determinant Method)

இந்த அதிகாரத்தைப் படிக்க விரும்புபவர்கள் அணிக்கோவையைப் (determinant) பற்றி அறிந்து கொள்வது இன்றியமையாததாகும். அணிக்கோவையைப் பற்றிய எல்லாவற்றையும் இயற்கணித நூல்களில் விரிவாகக் காணலாம். எனினும், அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையம் அமைக்கத் தேவையான அளவுக்கு அணிக்கோவையைப் பற்றி, இவ் வதிகாரத்தின் முற்பகுதியில் சுருக்கமாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

என்ற அமைப்பில், இரண்டு நிரைகளும் (rows), இரண்டு நிரல்களும் (columns) உள்ளன. இந்த அமைப்புக்கு இரண்டாம் நிலை அணிக்கோவை (second order determinant) எனப் பெயர். a_1, b_1, a_2, b_2 என்பன இவ் வணிக்கோவையின் மூலகங்கள் (etements) ஆகும். இவ் வணிக்கோவையின் மதிப்பு $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

என்ற அமைப்பில், மூன்று நிரைகளும் மூன்று நிரல்களும் உள்ளன. இந்த அமைப்புக்கு மூன்றும் நிலை அணிக்கோவை (third order determinant) எனப் பெயர். இவ் வணிக்கோவையின் மதிப்பு

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

அதாவது

$$a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

ஆகும். மேலே உள்ள மூன்றும் நிலை அணிக்கோவையை

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

என நிரல்வழியாக விரித்தெழுதியும் அதன் மதிப்பைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையங்களை அமைப்பதற்கு அணிக்கோவையின் பொதுப்பண்புகளில் கீழ்க்கண்ட மூன்றும் பயன்படுத்தப்படும்.

1. ஓர் அணிக்கோவையில் ஏதேனும் இரண்டு நிரல்களை (அல்லது நிரைகளை) ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்றினால் கிடைக்கும் அணிக்கோவையின் மதிப்பானது, முதல் அணிக் கோவையின் குறிமாற்றப்பட்ட மதிப்பாகும்.

2. ஓர் அணிக்கோவையின் ஒரு நிரலில் (அல்லது நிரையில்) உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் k என்ற ஓர் எண்ணால் பெருக்கினால் கிடைக்கும் அணிக்கோவையின மதிப்பானது, முதல் அணிக்கோவையின் மதிப்பை k - ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் மதிப்பாகும்.

3. ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு நிரலில் (அல்லது நிரையில்) உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் k என்ற ஓர் எண்ணால் பெருக்கி, அவற்றை வேறு ஏதேனும் ஒரு நிரலில் (அல்லது நிரையில்) உள்ள ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்டினால் கிடைக்கும் அணிக் கோவையின் மதிப்பானது, முதல் அணிக்கோவையின் மதிப்புக் குச் சமமாகும்.

ஓர் அணிக்கோவையின் மதிப்பு சுழி (zero) எனில், மேற் சொன்ன மூன்று பொதுப்பண்புகளிலிருந்து, இந்த அணிக் கோவையில் ஏதேனும் இரண்டு நிரல்களை (அல்லது நிரைகளை) ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்றினாலோ, ஒரு நிரலில் (அல்லது நிரையில்) உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் k என்ற ஓர் எண்ணால் பெருக்கினாலோ, ஒரு நிரலில் (அல்லது நிரையில்) உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் k என்ற ஓர் எண்ணால் பெருக்கி அவற்றை வேறு ஏதேனும் ஒரு நிரலில் (அல்லது நிரையில்) உள்ள

ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்டினாலோ கிடைக்கும் அணிக் கோவையின் மதிப்பும் சுழி ஆகும்.

அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையம் அமைக்க மூன்றாம் நிலை அணிக்கோவையே அதிலும் குறிப்பாக

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$

என்ற அமைப்பிலுள்ள அணிக்கோவையே பயன்படுத்தப்படும். இவ் வணிக்கோவையில் இறுதி நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் 1 என்ற எண்ணாக இருப்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

37. அணிக்கோவை முறையில் மும்மாறிச் சமன்பாட்டுக்கான நேமவரையம்

இதற்கு முந்திய அதிகாரங்களில், படித்தர அமைப்பில் உள்ள சில சமன்பாடுகளுக்குத் தளவடிவியலைப் பயன்படுத்தி நேமவரையம் அமைக்கும் முறைகள் விளக்கப்பட்டன. சில மும் மாறிச் சமன்பாடுகள் இதுவரை சொல்லப்பட்ட படித்தர அமைப்புகளில் இடம்பெறாமல் இருக்கலாம். இப்பொழுது மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட எந்தச் சமன்பாட்டுக்கும் நேமவரையம் அமைக்கும் பொதுவான முறையை அறிந்து கொள்ளலாம். இப் பொதுவான முறை பகு முறை வடிவியலை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

u, v, w என்ற மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு சமன் பாட்டை எடுத்துக்கொள்க. இச் சமன்பாட்டுக்குரிய நேம வரையத்தில் மாறிக்கு ஓர் அளவுகோல் வீதம் மூன்று அளவு கோல்கள் இருக்கும். இந்த அளவுகோல்களுக்குரிய கோடுகள் பொதுவாக வளைகோடுகளாக இருக்கலாம். குறியிணைப்புக்கோடு என்று சொல்லப்படும் ஒரு நேர்கோடானது, u, v, w - அளவு கோல்களை வெட்டும் புள்ளிகளில் உள்ள அளவீடுகள் கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் இருக்கும். ஒரு குறியிணைப்புக்கோடு u, v, w - அளவுகோல்களை முறையே (X_u, Y_u), (X_v, Y_v), (X_w, Y_w) என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுவ தாகக் கொள்க (படம் 147). அடைப்புகளுக்குள் கொடுக்கப் பட்டுள்ள இரு எண்களும் முறையே அப் புள்ளியின் X, Y - ஆயங் களைக் குறிக்கின்றன. X, Y இவற்றின் கீழ்க்குறிகள் எந்த மாறிக் குரிய புள்ளியின் அச்சுத்தூரம் என்பதைக் குறிக்கின்றன.

வசதிக்காக X, Y - அச்சுகள் செங்குத்து அச்சுகளாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன. X, Y - அச்சுகளைச் சரிவச்சு களாகவும் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

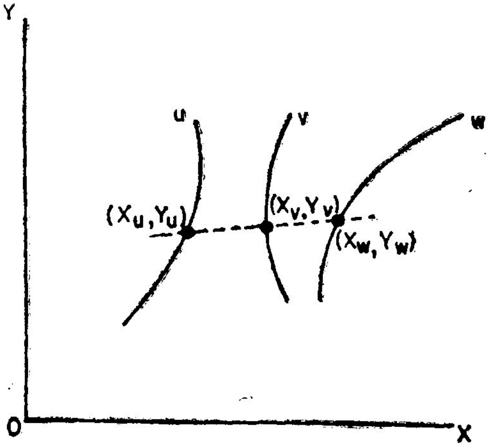
(X_u, Y_u), (X_v, Y_v), (X_w, Y_w) என்ற மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் இருப்பதால், இம் மூன்று புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு சுழி ஆகும். எனவே,

$$X_u (Y_v - Y_w) + X_v (Y_w - Y_u) + X_w (Y_u - Y_v) = 0$$

இச் சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} X_u & Y_u & 1 \\ X_v & Y_v & 1 \\ X_w & Y_w & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \dots (1)$$

என்று அணிக்கோவை அமைப்பிலும் எழுதலாம்.



படம் 147

அதிகாரம் ஏழில்

$$f_1(u) + f_2(v)\ f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில், w - அளவுகோலை அமைக்க

$$z' = \frac{k\, f_3(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

$$z = \frac{m_2\, f_4(w)}{f_3(w) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

என்ற வாய்பாடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டன. இங்கு z', z என்பன w - வின் சார்புகள் ஆகும். z', z - அச்சுகளைச் செங்குத்தாக எடுத்துக்கொண்டால், z', z என்பன முறையே w - அளவுகோலில் உள்ள புள்ளியின் மட்டாயமும் குத்தாயமும் ஆகின்றன. இதிலிருந்து w - அளவுகோலில் உள்ள புள்ளியின் X, Y - ஆயங்கள், w - வின் சார்புகளாக இருக்கும் என்பது தெரிகிறது. இவ்வாறாக, ஒரு மாறிக்குரிய அளவுகோலில் உள்ள புள்ளியின் X, Y – ஆயங்கள் அந்த மாறியின் சார்புகளாக இருப்பதைக் காணலாம். எனவே, X_u, Y_u என்பன u - வின் சார்புகள் ஆகும். X_v, Y_v என்பன v - யின் சார்புகள் ஆகும். X_w, Y_w என்பன w - வின் சார்புகள் ஆகும். ஒரு மாறியின் சார்பென்று ஒரு மாறிலியையும் சொல்லலாம். எடுத்துக்காட்டாக, 4 என்ற மாறிலியை u - வின் சார்பாகவும் சொல்லலாம், எனவே, X_u, Y_u, X_v, Y_v, X_w, Y_w என்பன, 4, $\frac{3}{2}$, 0, —7 போன்ற எண்களாகவும் இருக்கலாம்.

ஆகவே, u. v, w என்னும் மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட ஒரு சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்க, முதலில் அச் சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ f_3(w) & g_3(w) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (2)$$

என்ற அணிக்கோவை அமைப்பில் மாற்றி அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும் எனத் தெரிகிறது. சமன்பாடு (2) - இல் உள்ள

அணிக்கோவையின் இறுதி நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் 1 என்ற எண்ணுக இருப்பதைக் காண்க. மேலும், ஒரு நிரையில் உள்ள மூலகங்கள் u - வின் சார்புகளாகவும், மற்றொரு நிரையில் உள்ள மூலகங்கள் v - யின் சார்புகளாகவும், இன்னொரு நிரையில் உள்ள மூலகங்கள் w – வின் சார்புகளாகவும் உள்ளன. மேலே உள்ள அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையத்தின் வரையறைச் சமன்பாடு (defining equation) எனப் பெயர். சமன்பாடு (2) - இல் இருந்து, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக் குரிய நேமவரையத்தில்

u - அளவுகோலுக்கு $X = f_1(u)$, $Y = g_1(u)$

v - அளவுகோலுக்கு $X = f_2(v)$, $Y = g_2(v)$

w - அளவுகோலுக்கு $X = f_3(w)$, $Y = g_3(w)$

எனக் கிடைக்கிறது. இத் தொடர்புகளிலிருந்து, u, v, w இவற்றின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கான X, Y - மதிப்புகளைக் கணக்கிட்டு u, v, w - அளவுகோல்களை அமைத்தால் தேவையான நேமவரையம் கிடைக்கும்.

இப்பொழுது $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையம் அமைப்பது எப்படி எனக் காணலாம். கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} x^3 & x & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad — (3)$$

என்று அணிக்கோவை அமைப்பில் முதலில் மாற்றிக் கொள்க. சமன்பாடு (3) - இல் உள்ள அணிக்கோவை எப்படி வந்ததென வியப்பாக இருக்கலாம். அணிக்கோவையைப் பற்றி நன்கு அறிந்திருந்தால் சோதனைப் பிழை முறையால் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை அணிக்கோவை அமைப்பில் மாற்றிக்கொள்ள லாம். எனினும் சோதனைப் பிழை முறையைத் தவிர வேறொரு முறை கீழே விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$p = a$, $q = b$ என்க. எனவே, $x^3 + px + q = 0$. இம்மூன்று தொடர்புகளையும்

$$x^3 + px + q(1) = 0$$
$$-a + p(1) + q(0) = 0$$
$$-b + p(0) + q(1) = 0$$

என எழுதிக் கொள்ளலாம். இம் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் p, q என்ற இரண்டையும் நீக்கினால்

$$\begin{vmatrix} x^3 & x & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

எனக் கிடைக்கும். இச்சமன்பாட்டில் உள்ள அணிக்கோவையானது, p, q என்பவற்றின் தொடர்புகளைக் காட்டக்கூடிய மூன்று சமன்பாடுகளில் உள்ள p, q சார்பற்ற மூன்று கெழுக்களாலும் p-யின் மூன்று கெழுக்களாலும் q-வின் மூன்று கெழுக்களாலும் அமைக்கப்பட்டதாகும்.

அணிக்கோவையின் பொதுப் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி, சமன்பாடு (3) - ஐ வரையறைச் சமன்பாடாக மாற்றியமைக்கலாம், சமன்பாடு (3)- இல் உள்ள அணிக்கோவையில், இரண்டாவது நிரலிலுள்ள மூலகங்களை மூன்றாவது நிரலிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களுடன் கூட்டவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} x^3 & x & x+1 \\ -a & 1 & 1 \\ -b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \dots (4)$$

சமன்பாடு (4) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில், முதல் நிரையை $(x + 1)$ - ஆல் வகுக்கவும். முதல் நிரையை வகுப்பதெனில் முதல் நிரையிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் வகுப்பதெனப் பொருளாகும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} \frac{x^3}{x+1} & \frac{x}{x+1} & 1 \\ -a & 1 & 1 \\ -b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \dots (5)$$

சமன்பாடு (5) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில் முதல் நிரலை -1 என்ற எண்ணால் பெருக்கி, அதன் பின்னர் முதலிரண்டு நிரல்களை ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாற்றி அமைக்கவும். எனவே

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{x+1} & -\frac{x^3}{x+1} & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (6)$$

இச் சமன்பாடு $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தின் வரையறைச் சமன்பாடு ஆகும். கொடுக்கப் பட்ட சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிகளின் நெடுக்கங்கள் எதுவா யிருப்பினும், அச் சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கப் பயன்படுத்தப்படும் பொதுவான அணிக்கோவைச் சமன்பாடே வரையறைச் சமன்பாடு ஆகும். சமன்பாடு (6) - இலிருந்து, $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேம்வரையத்தில்

$$X_x = \frac{x}{x+1}, \quad Y_x = -\frac{x^3}{x+1}$$

$$X_a = 1 \quad , \quad Y_a = a$$

$$X_b = 0 \quad , \quad Y_b = b$$

எனக் கிடைக்கிறது.

$X_a = 1$ என்பதால் a - அளவுகோலில் உள்ள எல்லாப் புள்ளி களுக்கும் மட்டாயம் 1 ஆகும். இதிலிருந்து a – அளவுகோலுக் குரிய கோடானது Y - அச்சுக்கு இணையாக, Y - அச்சிலிருந்து ஓர் அலகு தூரத்தில் உள்ள ஒரு நேர்கோடு என அறியலாம். $X_b = 0$ என்பதால் b - அளவுகோலில் உள்ள எல்லாப் புள்ளி களுக்கும் மட்டாயம் 0 ஆகும். இதிலிருந்து b -அளவுகோலுக் குரிய கோடானது, Y - அச்சு என அறியலாம்.

X_x, Y_x என்பவைகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இல்லாததால் x - அளவுகோலுக்குரிய கோடானது, ஒரு வளை கோடு என அறியலாம். $x > 0$ எனில் $0 < \frac{x}{x+1} < 1$. இதிலி ருந்து x - இன் மிகைமதிப்புகளுக்கான x - அளவுகோல், b, a - அளவு கோல்களுக்கிடையே இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது.

இதுவரை அமைக்கப்பட்ட நேமவரையங்களில் சென்டி மீட்டரே அளவை அலகாகப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இனி

யும் சென்டிமீட்டரே அளவை அலகாகப் பயன்படுத்தப்படும். சென்டிமீட்டரை அளவை அலகாகப் பயன்படுத்துவதால், b, a-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் 1 செ.மீ. ஆகிறது. எனவே, b, a - அளவுகோல்கள் மிக நெருக்கமாக இருக்கும். அளவை அலகைச் சென்டிமீட்டராகவே கொண்டு b, a - அளவு கோல்களின் இடைத்தூரத்தை மிகுதிப்படுத்த நினைப்பின், வரையறைச் சமன்பாட்டை மாற்றியமைத்துக் கொள்ளவேண்டும். b, a – அளவுகோல்களின் இடைத்தூரத்தை 8 செ.மீ. ஆகக் கொள்ளலாம். சமன்பாடு (6) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில் முதல் நிரலை 8 - ஆல் பெருக்கி

$$\begin{vmatrix} \frac{8x}{x+1} & -\frac{x^3}{x+1} & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 8 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (7)$$

என வரையறைச் சமன்பாட்டை மாற்றியமைத்துக்கொண்டால் b, a -அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் 8 செ. மீ. ஆகும்.

a, b என்னும் மாறிகள் ஒவ்வொன்றின் நெடுக்கமும் —20 முதல் 20 முடிய எனக் கொள்க. மேலே உள்ள அமைப்பின்படி $Y_a = a$, $Y_b = b$ என்பதால் a, b - அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் 40 செ.மீ. ஆகிறது. a, b –அளவுகோல்கள் ஒவ்வொன்றின் நீளத்தையும் 10 செ.மீ ஆக மாற்றிக்கொள்ள விரும்பினால் $Y_a = \frac{a}{4}$, $Y_b = \frac{b}{4}$ என்றிருக்க வேண்டும். எனவே, சமன்பாடு (7) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில் இரண்டாம் நிரலை 4 - ஆல் வகுத்து

$$\begin{vmatrix} \frac{8x}{x+1} & -\frac{x^3}{4(x+1)} & 1 \\ 8 & \frac{a}{4} & 1 \\ 0 & \frac{b}{4} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (8)$$

என மாற்றி அமைத்துக்கொள்ள வேண்டும். சமன்பாடு (8) - ஐப் பயன்படுத்தி $x^3+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கப்போவதால் இச் சமன்பாட்டை நேமவரையத்தின் அமைப்புமுறை அணிக்கோவைச் சமன்பாடு (constructional

determinantal equation) என அழைக்கலாம். சமன்பாடு (8)-இலிருந்து $x^3+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குரிய நேமவரையத்தில்

$$X_x = \frac{8x}{x+1}, \quad Y_x = -\frac{x^3}{4(x+1)}$$

$$X_a = 8 \quad , \quad Y_a = \frac{a}{4}$$

$$X_b = 0 \quad , \quad Y_b = \frac{b}{4}$$

எனத் தெரிகிறது. இதன்படி X, Y ஆயங்களைப் பயன்படுத்தி அமைக்கப்படும் நேமவரையத்தை அதிகாரம் ஏழில் $x^3+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அமைத்த நேமவரையத்துடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்பொழுது இரண்டும் ஒன்றே என்பதை அறியலாம்.

$x^3+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையம் அமைக்க, முதலில் இச் சமன்பாடு மூன்றும் நிலை அணிக்கோவைச் சமன்பாடாகக் கீழ்க்கண்ட இரண்டு கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டு மாற்றியமைக்கப்படுகிறது.

1. அணிக்கோவையின் ஒவ்வொரு நிரையிலும் ஒரே ஒரு மாறிக்குள்ள சார்புகள்தான் வரவேண்டும். அதே நேரத்தில் ஒவ்வொரு மாறிக்குரிய சார்புகளும் ஒரே ஒரு நிரையில்தான் இருக்கவேண்டும். இதையே, ஒரு நிரையில் உள்ள மூலகங்கள் x - இன் சார்புகளாகவும், மற்றொரு நிரையில் உள்ள மூலகங்கள் a - யின் சார்புகளாகவும், இன்னொரு நிரையில் உள்ள மூலகங்கள் b - யின் சார்புகளாகவும் இருக்கவேண்டும் என்று கூறலாம்.

2. அணிக்கோவையின் இறுதி நிரலில் உள்ள மூலகங்கள் யாவும் 1 என்ற எண்ணாக இருக்கவேண்டும்.

மேற்கூறிய இரண்டு கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டு $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டை, அணிக்கோவையின் பொதுப்பண்புகளைப் பயன்படுத்தி

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{x+1} & -\frac{x^3}{x+1} & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1 + x^3} & \frac{1}{1 - x + x^2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{1 - b} & \frac{1}{1 - b} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^3} & 1 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

போன்ற பல்வேறு அமைப்புகளில் மூன்றும் நிலை அணிக்கோவைச் சமன்பாடாக மாற்றி அமைக்கலாம். இதிலிருந்து, $x^3 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குப் பகுமுறை வடிவியலைப் பயன்படுத்திப் பல்வேறு அமைப்புகளில் நேமவரையங்களை அமைக்கலாம் என்பது தெரிகிறது. ஆனால், தொகுமுறை வடிவியலைப் பயன்படுத்தி இச் சமன்பாட்டுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பில் நேமவரையம் அமைக்கும் முறை மட்டுமே அதிகாரம் ஏழில் சொல்லப்பட்டது.

38. இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கான பல்வேறு நேமவரைய அமைப்புகள்

$x^2 + ax + b = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டுக்கான நேமவரையத்தின் பல்வேறு அமைப்புகளை இப்பொழுது பார்க்கலாம்.

டி - ஒகேனின் அமைப்பு (D'ocagne's form)

$x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (1)$$

என எழுதலாம். அணிக்கோவையின் பொதுப் பண்புகளைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடு (1) - ஐ

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{x+1} & -\frac{x^2}{x+1} & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

என எழுதலாம். a, b என்னும் மாறிகள் ஒவ்வொன்றின் நெடுக்கமும் —10 முதல் 10 முடிய எனக் கொள்க. இப்பொழுது சமன்பாடு (2) - ஐ

$$\begin{vmatrix} \frac{8x}{x+1} & -\frac{x^2}{2(x+1)} & 1 \\ 8 & \frac{a}{2} & 1 \\ 0 & \frac{b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \ldots \quad (3)$$

என நேமவரையம் அமைப்பதற்கேற்ப மாற்றியமைத்துக் கொள்ளலாம்.

b - அளவுகோலுக்கு $X = 0$, $Y = \frac{b}{2}$. எனவே b - அளவு கோலை Y - அச்சின்மீது ஒரு செ.மீ. நீளம் b - யின் 2 அலகுகளைக் குறிக்குமாறும், $(0, 0)$ என்ற புள்ளியில் $b = 0$ என்ற அளவீட்டுக் குரிய புள்ளி ஒன்றியிருக்குமாறும் அமைக்கவேண்டும். a - அளவு கோலுக்கு $X = 8$, $Y = \frac{a}{2}$. எனவே, a - அளவுகோலை $X = 8$ என்ற Y - அச்சுக்கு இணையான கோட்டின்மீது ஒரு செ.மீ. நீளம் a - யின் 2 அலகுகளைக் குறிக்குமாறும் $(8, 0)$ என்ற புள்ளியில் $a = 0$ என்ற அளவீட்டுக்குரிய புள்ளி ஒன்றியிருக்கு மாறும் அமைக்கவேண்டும். b, a - அளவுகோல்கள் இரண்டும் கீழிருந்து மேலாகச் செல்கின்றன.

x - அளவுகோலுக்கு $X = \frac{8x}{x+1}$, $Y = -\frac{x^2}{2(x+1)}$. X, Y - ஆயங்களை அளந்து x - இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான புள்ளிகளைக் குறித்து x - அளவுகோலை அமைக்கவேண்டும்,

ஏழாம் அதிகாரத்தில் படித்தபடி, b, a - அளவுகோல்களை அமைத்ததும் குறியிணைப்புக் கோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளைப் பயன்படுத்தியும் x - அளவுகோலை அமைக்கலாம். அதிகாரம் ஏழில், $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அமைக்கப் பட்ட நேமவரையம் (படம் 112) டி - ஒகேனின் அமைப்பே ஆகும்.

x - அளவுகோலுக்குரிய வளைகோடு எவ்வகையைச் சேர்ந்தது? $X = \frac{8x}{x+1}$, $Y = -\frac{x^2}{2(x+1)}$ என்ற இரண்டு தொடர்புகளி லிருந்து x - ஐ நீக்கம் செய்தால்,

$$16\,Y = \frac{X^2}{X-8}$$

எனக் கிடைக்கும். இது ஒரு மீபரவளையம் (hyperbola) ஆகும். இம் மீபரவளையத்திற்கு $X = 8$ அதாவது a - அளவுகோல் ஓர் எட்டாப் புள்ளியில் (point at infinity) உள்ள தொடுகோடாகும். இத் தொடுகோட்டுக்குத் தொலைத் தொடுகோடு (asymptote) எனப்பெயர்.

விட்டாகரின் அமைப்பு (Whittakar's form)

$x^2+ax+b = 0$ என்ற சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (1)$$

என எழுதலாம் எனச் சொல்லப்பட்டது. சமன்பாடு (1) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில் மூன்றாவது நிரலிலுள்ள மூலகங்களை இரண்டாவது நிரலிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களிலிருந்து கழிக்கவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} x & -x^2-1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & b-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (2)$$

சமன்பாடு (2)- இல் உள்ள அணிக்கோவையில், முதல், இரண்டாம், மூன்றும் நிரைகளை முறையே $(1 + x^2)$, $-a$, $(1 - b)$ இவற்றால் வகுக்கவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1+x^2} & -1 & \frac{1}{1+x^2} \\ -\frac{1}{a} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{1-b} \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (3)$$

சமன்பாடு (3) – இல் உள்ள அணிக்கோவையில் இரண்டாவது நிரலை -1 என்பதால் பெருக்கி நிரல்களை இடம் மாற்றி அமைத்தால்

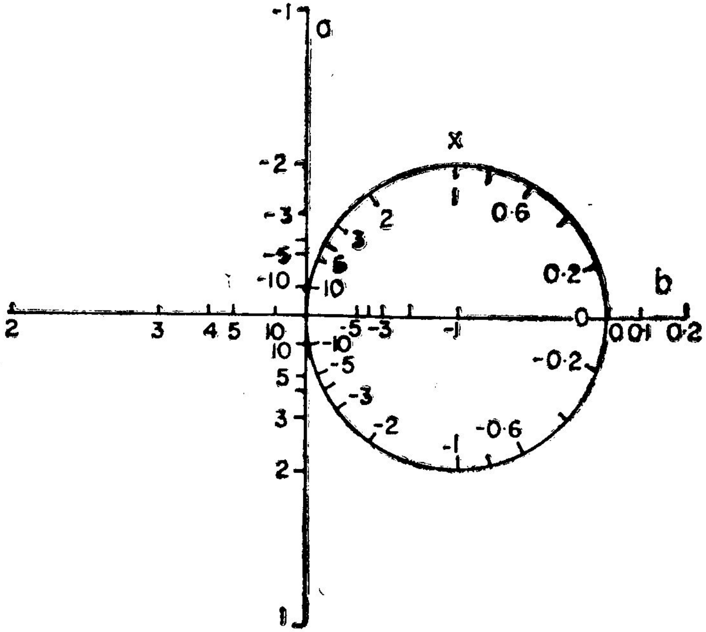
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1+x^2} & \frac{x}{1+x^2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{1-b} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (4)$$

எனக் கிடைக்கும். இந்த அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டை $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தின் வரையறைச் சமன்பாடு எனலாம். சமன்பாடு (4) – இல் உள்ள அணிக்கோவையில் முதலிரண்டு நிரல்களை 4 என்ற எண்ணால் பெருக்கி

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{1+x^2} & \frac{4x}{1+x^2} & 1 \\ 0 & -\frac{4}{a} & 1 \\ \frac{4}{1-b} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (5)$$

என்னும் அமைப்புமுறை அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டை அமைத்துக்கொள்ளலாம்.

a - அளவுகோலுக்கு $X = 0$. எனவே, a - அளவுகோலை Y - அச்சின் மீது அமைக்கவேண்டும். a -யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான Y -ஆயங்களை $Y = -\frac{4}{a}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து கணக்கிட்டு, a - அச்சின் மீது அளவீடுகளைச் செய்யவேண்டும். b - அளவுகோலுக்கு $Y = 0$. எனவே, b - அளவுகோலை X - அச்சின் மீது அமைக்கவேண்டும். b - யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான X - ஆயங்களை $X = \frac{4}{1-b}$ என்ற தொடர்பிலிருந்து கணக்கிட்டு b – அச்சின் மீது அளவீடுகளைச் செய்யவேண்டும் (படம் 148).



படம் 148

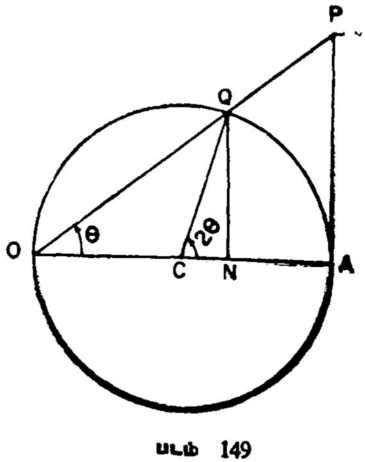
x - அளவுகோலுக்கு $X = \frac{4}{1+x^2}$, $Y = \frac{4x}{1+x^2}$

இவ்விரண்டு தொடர்புகளிலிருந்து x - ஐ நீக்கம் செய்தால்

$$X^2 + Y^2 = 4X$$

அதாவது $(X-2)^2 + Y^2 = 4$

என்ற தொடர்பு கிடைக்கிறது. இது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும். இவ் வட்டத்தின் மையம் (centre) $(2, 0)$ ஆகும். ஆரம் 2 செ. மீ. ஆகும். எனவே, x - அளவுகோலை அமைக்க, முதலில் $(2, 0)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும், 2 செ. மீட்டரை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டத்தை வரையவேண்டும். இவ் வட்டமே x - வளை கோடாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டில் $b = 0$ எனில், $a = -x$. எனவே, $b = 0$ என்ற புள்ளியை $a = -1, -2, \ldots \ldots, -10, 1, 2, \ldots \ldots, 10$ என்ற புள்ளிகளுடன் நேர்கோடுகளால் இணைத்து இக் கோடுகள் வட்டத்தை வெட்டுமிடங்களில் முறையே $x = 1, 2, \ldots \ldots 10, -1, -2, \ldots \ldots, -10$ என்ற அளவீடுகளைச் செய்யவேண்டும். இவ்வாறு செய்தால் வட்டத்தின் இடது பாதியின் மீது மட்டுமே அளவீடு செய்ய முடிகிறது. வட்டத்தின் வலது பாதியின் மீதும் அளவீடு செய்ய வேண்டுமெனில், a - அளவுகோலை மேலும் கீழும் நீட்டிவிட்டு, நீட்டிய பகுதிகளின் மீது அளவீடு செய்துகொள்ள வேண்டும். பின்னர், மேலே விளக்கியவாறு தேவையான அள வீடுகளை வட்டத்தின் மீது அமைத்துக் கொள்ளலாம். a - அளவு கோலை மேலும் கீழும் நீட்டிவிடத் தாளின் அளவு போதவில்லை யெனில், வட்டத்தின் வலதுபாதியின் மீது அளவீடுகளைச் செய்யக் கீழ்க்கண்ட முறையைப் பின்பற்றலாம். முதலில் $X = 4$ என்ற நேர்கோட்டின் மீது $Y = 4x$ இருக்குமாறு x - இன் துணையளவு கோலை அமைத்துக்கொள்ளவேண்டும். x - இன் துணையளவு கோலின் மீதுள்ள அளவுக்குறியீடுகளுக்கு $(0, 0)$ என்ற புள்ளி யிலிருந்து நேர்கோடுகள் வரைந்தால் அவை x - வளைகோட்டை அதாவது வட்டத்தை ஒத்த அளவீடுகளில் வெட்டும்.



படம் 149

படம் 149 - இல், P என்ற புள்ளி x - இன் துணையளவு கோலின் x_0 என்ற அளவீட்டைக் குறிக்கட்டும். எனவே, $AP = 4x_0$. $\angle AOQ = \theta$ என்க. என்வே

$$\tan\theta = \frac{AP}{OA} = \frac{4x_0}{4} = x_0$$

$\angle AOQ = \theta$ என்பதால், $\angle ACQ = 2\theta$. எனவே,

$$NQ = QC \sin 2\theta = 2\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right] = \frac{4x_0}{1+x_0^2}$$

$$ON = NQ \cot\theta = \frac{4x_0}{1+x_0^2}\left[\frac{1}{x_0}\right] = \frac{4}{1+x_0^2}$$

$ON = \dfrac{4}{1+x_0^2}$, $NQ = \dfrac{4x_0}{1+x_0^2}$ என்பதால் Q என்ற புள்ளி x - அளவுகோலின் x_0 என்ற அளவீட்டைக் குறிக்கும் என்பது தெரிகிறது. ஆகவே, $(0, 0)$ என்ற புள்ளியை x - இன் துணையளவு கோலின் மீதுள்ள $0{\cdot}1$, 0.2, ……, 1, -0.1, -0.2, ……, -1 என்ற புள்ளிகளுடன் நேர்கோடுகளால் இணைத்து இக் கோடுகள் வட்டத்தை வெட்டுமிடங்களில் முறையே இதே அளவீடுகளைச் செய்யவேண்டும்.

$x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு மேற்கூறிய முறையில் அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்திற்கு விட்டாகரின் அமைப்பு எனப் பெயர். $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு வரையப்பட்ட வட்டநேமவரையம் என்றும் இதைக் கூறலாம். அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில்

கொடுக்கப்பட்ட a, b இவற்றின் மதிப்புகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக்கோடானது, வட்டத்தை வெட்டாமலே சென்றால், $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இருமூலங்களும் கற்பனை மூலங்களாகும். குறியிணைப்புக்கோடு வட்டத்தின் தொடுகோடாக அமைந்தால், இரு மூலங்களும் சமமாகும்.

டி-ஒகேனின் அமைப்பில் a, b - அளவுகோல்களை அமைப்பது மிக எளிது. மேலும் எளிதில் படிப்பதற்கேற்ப அளவீடுகள் இந்த அளவுகோல்களின் மீது இருக்கும். ஆனால், விட்டாகரின் அமைப்பில் a, b - அளவுகோல்களை அமைக்கப் பல கணக்கீடுகள் செய்ய வேண்டும். மேலும் இந்த அளவுகோல்களின் மீதுள்ள அளவீடுகள் எளிதில் படிப்பதற்கேற்ப இரா.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1+x^2} & \frac{x}{1+x^2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{1-b} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டில் உள்ள அணிக்கோவையில் முதலிரண்டு நிரல்களையும் ஒரே எண்ணால் பெருக்கி அமைப்புமுறை அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டை உருவாக்கினால், x- அளவுகோல் ஒரு வட்டத்தின் மீது அமைந்தது. முதல் நிரலை ஓர் எண்ணாலும், இரண்டாம் நிரலை மற்றோர் எண்ணாலும் பெருக்கி அமைப்புமுறை அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டை உருவாக்கினால் x-அளவுகோல் ஒரு நீள் வட்டத்தின் (ellipse) மீது அமைவதைக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக முதல் நிரலை 8 - ஆலும் இரண்டாம் நிரலை 4 - ஆலும் பெருக்கி நேமவரையத்தின் அமைப்புமுறை அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டை அமைத்துக் கொள்க. எனவே, x - அளவுகோலுக்கு $X = \frac{8}{1 + x^2}$, $Y = \frac{4x}{1 + x^2}$. இவ்விரண்டு தொடர்புகளிலிருந்து x - ஐ நீக்கம் செய்தால்,

$$\frac{(X-4)^2}{16} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

என்ற நீள்வட்டம் கிடைக்கும். இதன் மையம் $(4, 0)$ என்ற புள்ளியாகும். இந்த நீள்வட்டத்தில் பேரச்சின் நீளம் 8 செ. மீ.

ஆகும். சிற்றச்சின் நீளம் 4 செ. மீ. ஆகும். எனவே, $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு a, b - அளவுகோல்களை முறையே, Y, X - அச்சுகளின் மீதும், x - அளவுகோலை ஒரு நீள் வட்டத்தின் மீதும் அமைத்து நேமவரையம் அமைக்கலாம் எனத் தெரிகிறது.

பரவளைய நேமவரையம் (Parabolic Nomogram)

$x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} x & -x^2 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{— (1)}$$

என மாற்றி எழுதிக் கொள்க. சமன்பாடு (1) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில், முதல், இரண்டாம், மூன்றும் நிரைகளை முறையே $-x^2$, a, b இவற்றால் வகுக்கவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{x} & 1 & -\frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{... (2)}$$

சமன்பாடு (2) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில் இறுதி இரண்டு நிரல்களை இடம் மாற்றி அமைப்பதோடு, முதல் நிரலை -1 என்பதால் பெருக்கவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{x^2} & 1 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{— (3)}$$

என்ற வரையறைச் சமன்பாடு கிடைக்கும். இச் சமன்பாட்டிலுள்ள அணிக்கோவையில் முதலிரண்டு நிரல்களையும் ஒரே எண்ணாலோ

அல்லது வெவ்வேறு எண்களாலோ பெருக்கி நேமவரையத்தின் அமைப்பு முறை அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டை அமைத்துக் கொள்க. எடுத்துக்காட்டாக, முதலிரண்டு நிரல்களையும் 4- ஆல் பெருக்கிக் கொள்க. எனவே, x - அளவுகோலுக்கு $X = \frac{4}{x}$, $Y = -\frac{4}{x^2}$. இவற்றிலிருந்து x - ஐ நீக்கம் செய்தால் $X^2 = -4Y$ என்ற பரவளையம் (parabola) கிடைக்கும். எனவே, $x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு a, b - அளவுகோல்களை முறையே X, Y - அச்சுகளின் மீதும், x - அளவுகோலை $X^2 = -4Y$ என்ற பரவளையத்தின் மீதும் அமைத்து நேமவரையம் அமைக்கலாம் எனத் தெரிகிறது.

இவ்வாறு $x^2+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குப் பல்வேறு அமைப்புகளில் நேமவரையம் அமைக்க முடியும் என்பதுபோல அணிக்கோவை முறையைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு சமன்பாட்டுக்கும் பல்வேறு அமைப்புகளில் நேமவரையம் அமைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 53

$f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தின் வரையறைச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

$$p - f_1(u) = 0 \text{ என்க.}$$

$$q - f_2(v) = 0 \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே, } p + q - f_3(w) = 0.$$

இம் மூன்று தொடர்புகளிலிருந்தும் p, q என்பவற்றை நீக்குக. எனவே,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1(u) \\ 0 & 1 & -f_2(v) \\ 1 & 1 & -f_3(w) \end{vmatrix} = 0 \qquad \dots (1)$$

சமன்பாடு (1) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில், முதல் நிரையை m_1 - ஆலும், இரண்டாம் நிரையை m_2 - ஆலும் பெருக்கவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} m_1 & 0 & -m_1 f_1(u) \\ 0 & m_2 & -m_2 f_2(v) \\ 1 & 1 & -f_3(w) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (2)$$

சமன்பாடு (2) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில், முதல், இரண்டாம், மூன்றும் நிரல்களை முறையே m_1, m_2 -1 என்பவற்றால் வகுக்கவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m_1 f_1(u) \\ 0 & 1 & m_2 f_2(v) \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & f_3(w) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (3)$$

சமன்பாடு (3) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில் முதல் நிரலிலுள்ள மூலகங்களுடன் இரண்டாம் நிரலிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களைக் கூட்டவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m_1 f_1(u) \\ 1 & 1 & m_2 f_2(v) \\ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} & f_3(w) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (4)$$

சமன்பாடு (4) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில், மூன்றுவது நிரையை $\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$ - ஆல் வகுக்கவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m_1 f_1(u) \\ 1 & 1 & m_2 f_2(v) \\ 1 & \frac{m_1}{m_1 + m_2} & \left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right] f_3(w) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots (5)$$

சமன்பாடு (5) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில் நிரல்களை இடம் மாற்றி அமைத்தால்

$$\begin{vmatrix} 0 & m_1 f_1(u) & 1 \\ 1 & m_2 f_2(v) & 1 \\ \dfrac{m_1}{m_1+m_2} & \left[\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right] f_3(w) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

என்ற வரையறைச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

அதிகாரம் மூன்றில் $f_1(u) + f_2(v) = f_3(w)$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு மூன்று இணையளவுகோல்களைக் கொண்ட நேம வரையம் அமைக்கப்பட்டது அல்லவா ? அந்த முறையை, மேலே உள்ள அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி நேம வரையம் அமைக்கும் முறையுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால் இரண்டும் ஒன்றே என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 54

$\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w)$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தின் வரையறைச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

$p - f_1(u) = 0$ என்க.

$q - f_2(v) = 0$ என்க.

எனவே, $p - q\, f_3(w) = 0.$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் p, q என்ற இரண்டையும் நீக்குக. எனவே,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1(u) \\ 0 & 1 & -f_2(v) \\ 1 & -f_3(w) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

முதல் நிரையை m_1 - ஆலும், இரண்டாம் நிரையை $-m_2$ என்பதாலும் பெருக்கி அதன் பின்னர் முதல் நிரலை m_1 - ஆலும் இரண்டாம் நிரலை $-m_2$ என்பதாலும் மூன்றாம் நிரலை -1 என்பதாலும் வகுத்தால்

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m_1 f_1(u) \\ 0 & 1 & -m_2 f_2(v) \\ \dfrac{1}{m_1} & \dfrac{f_3(w)}{m_2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடு (2) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில் முதல் நிரலிலுள்ள மூலகங்களுடன் இரண்டாம் நிரலிலுள்ள ஒத்த மூலகங்களைக் கூட்டி அதன் பின்னர் மூன்றாவது நிரையை $\left[\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{f_3(w)}{m_2}\right]$ என்பதால் வகுக்கவும். எனவே,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m_1 f_1(u) \\ 1 & 1 & -m_2 f_2(v) \\ 1 & \dfrac{m_1 f_3(w)}{m_2 + m_1 f_3(w)} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடு (3) - இல் உள்ள அணிக்கோவையில் நிரல்களை இடம் மாற்றி அமைத்தால்

$$\begin{vmatrix} 0 & m_1 f_1(u) & 1 \\ 1 & -m_2 f_2(v) & 1 \\ \dfrac{m_1 f_3(w)}{m_2 + m_1 f_3(w)} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

என்ற வரையறைச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து அமைக்கப்படும் நேமவரையத்தை யும் $\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)} = f_3(w)$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு நான்காம் அதிகாரத்தில் அமைக்கப்பட்ட Z - விளக்கப் படத்தையும் ஒப்புநோக்குக. u, v - அளவுகோல்களின் தொடக்கப் புள்ளிகளை இணைக்கும் மூலைவிட்டக்கோடே w - அச்சாகும். மேலே உள்ள அணிக் கோவைச் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி அமைக்கும் நேம வரையத்தில் w - அச்சுக்கான மூலைவிட்டக்கோடு கிடைக்கோடாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 55

$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேம வரையத்தின் வரையறைச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

$$p = \frac{1}{f_1(u)} \text{ என்க.}$$

$$q = \frac{1}{f_2(v)} \text{ என்க.}$$

எனவே, $p + q = \frac{1}{f_3(w)}$.

இம் மூன்று சமன்பாடுகளையும்

$$p\, f_1(u) - 1 = 0$$

$$q\, f_2(v) - 1 = 0$$

$$p\, f_3(w) + q\, f_3(w) - 1 = 0$$

என மாற்றிக் கொள்ளலாம். இம் மூன்று தொடர்புகளிலிருந்தும் p, q என்ற இரண்டையும் நீக்குக. எனவே,

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & 0 & -1 \\ 0 & f_2(v) & -1 \\ f_3(w) & f_3(w) & -1 \end{vmatrix} = 0$$

இச் சமன்பாட்டிலுள்ள அணிக்கோவையில் முதல் நிரலை m_1 - ஆலும் இரண்டாம் நிரலை m_2 - ஆலும் மூன்றும் நிரலை -1 என்பதாலும் பெருக்கினால்

$$\begin{vmatrix} m_1 f_1(u) & 0 & 1 \\ 0 & m_2 f_2(v) & 1 \\ m_1 f_3(w) & m_2 f_3(w) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற வரையறைச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

அதிகாரம் ஆறில் $\frac{1}{f_1(u)} + \frac{1}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$ என்ற சமன் பாட்டுக்கு ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அளவுகோல்களைக் கொண்ட

நேமவரையம் அமைக்கப்பட்டது அல்லவா ? அதில் u, v அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள கோணத்தை 90° எனக் கொண்டால், மேலே உள்ள அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டின் அடிப்படையில் அமைத்த நேமவரையம் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 56

$X_a = 1$, $Y_a = a$, $X_b = -1$, $Y_b = b$ என்றிருக்குமாறு $\sin x = a + bx$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தின் வரையறைச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

தேவையான வரையறைச் சமன்பாடானது

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கவேண்டும். இச் சமன்பாட்டை

$$f(x)\,[a - b] - g(x)\,[1 + 1] + 1\,[b + a] = 0$$

அதாவது $a\,[\,1 + f(x)\,] + b\,[1 - f(x)\,] - 2g(x) = 0$

என விரித்தெழுதிக் கொள்ளலாம். இச்சமன்பாடு

$$a + bx - \sin x = 0$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைக் குறிக்க வேண்டுமெனில்

$$\frac{1 + f(x)}{1} = \frac{1 - f(x)}{x} = \frac{2\,g(x)}{\sin x}$$

எனவே $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

$$g(x) = \frac{\sin x}{1 + x}$$

ஆகவே தேவையான வரையறைச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} \frac{1-x}{1+x} & \frac{\sin x}{1+x} & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 57

$w(u^2 - v^2) = uv(3u - 2v)$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேம வரையம் அமை. $u(0 - 3)$; $v(0 - 3)$; $w(0 - 10)$.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் u, v என்னும் மாறிகள் மீண்டும் வரும் மாறிகள் ஆதலால், இச் சமன்பாட்டுக்கு அணிக் கோவை முறையில் நேமவரையம் அமைப்பதே எளிதாகும். தேவையான நேமவரையத்தின் வரையறைச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ f_3(w) & g_3(w) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (1)$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும். இச் சமன்பாட்டை விரித்தெழுதினுல்

$$f_1 g_2 - f_1 g_3 + g_1 f_3 - g_1 f_2 + f_2 g_3 - f_3 g_2 = 0 \ldots (2)$$

எனக் கிடைக்கும். இங்கு f_1, g_2, ... என்பன $f_1(u)$, $g_2(v)$, ... என்பவற்றைக் குறிக்கின்றன. 1, 2, 3 என்ற கீழ்க்குறிகள் முறையே u, v, w இவற்றின் சார்புகளைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளன என நினைவிற் கொண்டு, சமன்பாடு (2)-ஐ

$$u^2 w - v^2 w - 3u^2 v + 2uv^2 = 0 \quad \ldots (3)$$

என்ற கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுடன் ஒப்புநோக்கி f_1, g_2, ... என்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காணவேண்டும்.

சமன்பாடு (2)-இல் $f_1 g_2$ என்னும் உறுப்பு u-வின் சார்பையும் v-யின் சார்பையும் பெருக்கக் கிடைப்பதாகும். எனவே f_1 g_2

என்பது $-3u^2v$ அல்லது $2uv^2$ ஆக இருக்கும். இவ்வாறு சமன் பாடுகள் (2)-ஐயும் (3)-ஐயும் ஒப்பு நோக்கினல்

$$f_1 g_2 = -3u^2v \text{ அல்லது } 2uv^2$$

$$-g_1 f_2 = -3u^2v \text{ அல்லது } 2uv^2$$

எனக் காணலாம். சமன்பாடுகளை ஒப்புநோக்கும்பொழுது u, v என்ற மாறிகள் வரக்கூடிய இரண்டு உறுப்புகள் மட்டும் முதலில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன. இப்பொழுது $f_1 g_2 = 2uv^2$ எனக் கொள்க. எனவே $-g_1 f_2$ என்னும் உறுப்பு $-3u^2v$ என்னும் உறுப்புக்குச் சமமாக இருக்கும். பிறகு $f_1 = 2u$, $g_2 = v^2$ எனக் கொள்க. இதேபோல் $g_1 = u^2, f_2 = 3v$ எனக் கொள்க. f_1, g_2, g_1, f_2 இவற்றின் மதிப்புகளைச் சமன்பாடு (2)-இல் பதிலிட

$$2uv^2 - 2ug_3 + u^2f_3 - 3u^2v + 3vg_3 - v^2f_3 = 0 \quad \ldots (4)$$

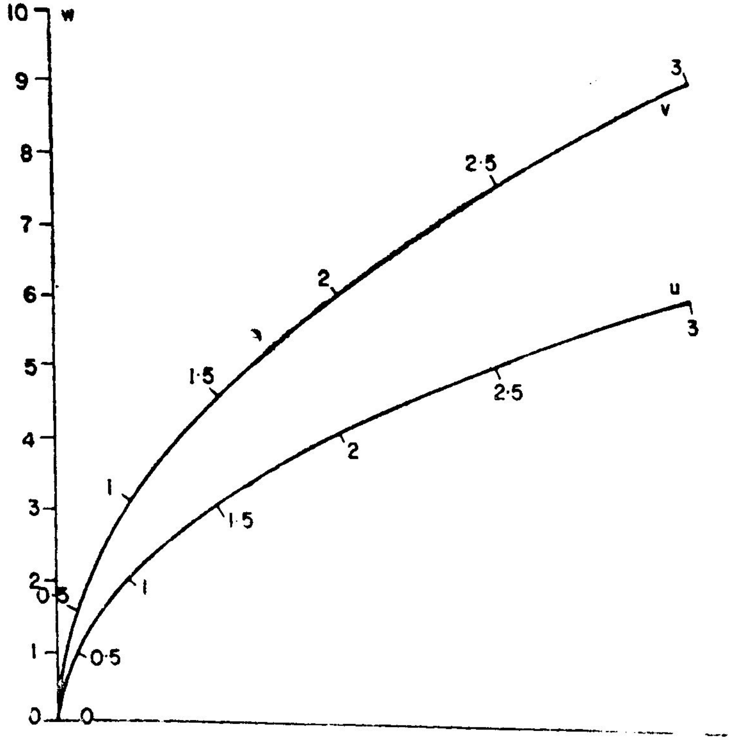
இப்பொழுது சமன்பாடு (4)-ஐச் சமன்பாடு (3)- உடன் ஒப்பு நோக்கினல் $f_3 = w$, $g_3 = 0$ எனக் கிடைக்கும். எனவே தேவையான வரையறைச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} 2u & u^2 & 1 \\ 3v & v^2 & 1 \\ w & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (5)$$

ஆகும். இச் சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} u^2 & 2u & 1 \\ v^2 & 3v & 1 \\ 0 & w & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (6)$$

என நிரல்களை மாற்றி அமைத்துக் கொண்டு, இதையே அமைப்பு முறை அணிக்கோவைச் சமன்பாடாகக் கொள்ளலாம். இச் சமன் பாட்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட நேம வரையம் படம் 150-இல் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 150

குறிப்பு:-

எடுத்துக்காட்டுகள் 53, 54, 55 இவற்றில் p, q என்பவற்றின் உதவியால் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு மூன்று சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொள்ளப்பட்டது. பின்னர் p, q என்ற இரண்டையும் நீக்கி, ஓர் அணிக்கோவைச் சமன்பாடு கண்டுபிடிக்கப் பட்டது. இதிலிருந்து, அணிக்கோவையின் பொதுப் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி வரையறைச் சமன்பாடு கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. எடுத்துச்காட்டு 56-இல் வரையறைச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பை விரித்தெழுதி, அதைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுடன் ஒப்பு நோக்கித் தேவையான வரையறைச் சமன்பாடு கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. எடுத்துக்காட்டு 57-இல் வரையறைச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பையும் கொடுக்கப்பட்ட சமன்

பாட்டையும் ஒப்பிட்டுச் சோதனைப்பிழை முறையைப் பயன் படுத்தி வரையறைச் சமன்பாடு கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.

மேற்கண்ட முறைகளில் எந்த முறையைப் பயன்படுத்தி னும் சில மும்மாறிச் சமன்பாடுகளை நேமவரையம் அமைப்பதற் கேற்ப அணிக்கோவைச் சமன்பாடுகளாக மாற்றி எழுத முடியாமற் போகலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 58

$T = \dfrac{T_1 - T_2}{[\log_e T_1 - \log_e T_2]}$ என்ற சராசரி வெப்பநிலைச் சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. $T\,(0 - 120)°C$; $T_1\ (10 - 220)°C$; $T_2\ (10 - 220)°C$.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} 0 & T & 1 \\ 1 & T_1 & \log_e T_1 \\ 1 & T_2 & \log_e T_2 \end{vmatrix} = 0$$

என மாற்றியமைத்துக் கொள்ளலாம். இச்சமன்பாட்டிலுள்ள அணிக்கோவையில் இரண்டாவது நிரையை $(\log_e T_1)$ - ஆலும், மூன்றாவது நிரையை $(\log_e T_2)$ - ஆலும் வகுத்தால்

$$\begin{vmatrix} 0 & T & 1 \\ \dfrac{1}{\log_e T_1} & \dfrac{T_1}{\log_e T_1} & 1 \\ \dfrac{1}{\log_e T_2} & \dfrac{T_2}{\log_e T_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற வரையறைச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

கொடுத்துள்ள நெடுக்கங்களுக்கேற்ப இச்சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{T}{10} & 1 \\ \dfrac{20}{\log_e T_1} & \dfrac{T_1}{10\log_e T_1} & 1 \\ \dfrac{20}{\log_e T_2} & \dfrac{T_2}{10\log_e T_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என மாற்றியமைத்துக் கொள்ளலாம். இப்பொழுது அமைக்கப் போகும் நேமவரையத்தில், T-அளவுகோல் Y-அச்சின்மீது அமையும்.

T_1 - அளவுகோலுக்கு $X = \dfrac{20}{\log_e T_1}$, $Y = \dfrac{T_1}{10\log_e T_1}$

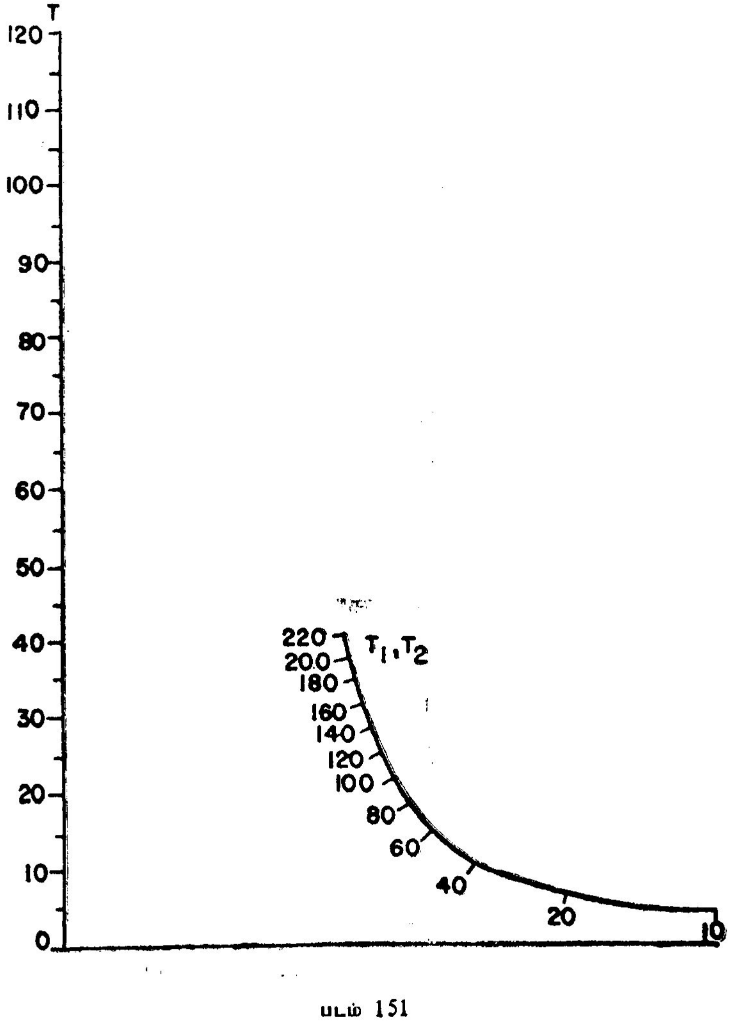
T_2 - அளவுகோலுக்கு $X = \dfrac{20}{\log_e T_2}$, $Y = \dfrac{T_2}{10\log_e T_2}$

இவற்றிலிருந்து T_1, T_2 இவற்றின் சம மதிப்புகள் ஒரே புள்ளியால் குறிக்கப்படும் என அறியலாம். எனவே T_1-அளவுகோலை அமைத்து அதையே T_2 - அளவுகோலாகவும் பயன்படுத்திக்

அட்டவணை 32

T_1	$\log_e T_1$	$\dfrac{1}{\log_e T_1}$	$X = \dfrac{20}{\log_e T_1}$	$Y = \dfrac{T_1}{10\log_e T_1}$
10	2.3026	0.4343	8.686	0.4343
20	2.9957	0.3338	6.676	0.6676
40	3.6889	0.2711	5.422	1.0844
60	4.0943	0.2442	4.884	1.4652
80	4.3820	0.2282	4.564	1.8256
100	4.6052	0.2171	4.342	2.1710
120	4.7875	0.2089	4.178	2.5068
140	4.9416	0.2024	4.048	2.8336
160	5.0752	0.1970	3.940	3.1520
180	5.1930	0.1926	3.852	3.4668
200	5.2983	0.1887	3.774	3.7740
220	5.3936	0.1854	3.708	4.0788

கொள்ளவேண்டும். T_1 - அளவுகோலை அமைக்க, T_1 -இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கான X, Y-ஆயங்களைக் கணக்கிட்டு வைத்துக் கொள்ளவேண்டும். (அட்டவணை 32), இவ்வட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள X, Y-ஆயங்களை அளந்து T_1–இன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கான புள்ளிகளைக் குறித்து, இப்புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடு வரைந்தால், T_1-அளவுகோல் கிடைக்கும். T_1-அளவுகோல்தான் T_2-அளவுகோலாகவும் பயன்படுகிறது.



படம் 151

அமைத்து முடிக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் (படம் 151), ஒரு குறியிணைப்புக்கோடு T_1, T_2-வளைகோட்டை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டினால், ஒரு புள்ளி T_1-இன் மதிப்பையும், மற்றொரு புள்ளி T_2-இன் மதிப்பையும் குறிக்கும்.

$$T = \frac{T_1 - T_2}{[\log_e T_1 - \log_e T_2]}$$ என்பதில் $T_1 = T_2$ எனில்

T-யின் மதிப்பு $\frac{0}{0}$ என்ற தேரா அமைப்பில் (indeterminate form) உள்ளது. எனினும், T_1-இன் மதிப்பு T_2-ஐ நோக்கிச் சென்றால் T-யின் மதிப்பும் T_2-ஐ நோக்கிச் செல்லும் என நிறுவலாம். எனவே $T_1 = T_2$ எனில், $T = T_2$. இதிலிருந்து T, T_1-இவற்றின் சம மதிப்புகளை இணைக்கும் குறியிணைப்புக் கோடானது, T_1, T_2-வளைகோட்டுக்குத் தொடுகோடாக இருக்கும் என்பது தெரிகிறது.

39. மூன்று அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையத்தின் அமைப்பும் அதற்குரிய சமன்பாட்டின் அமைப்பும்

ஒரு மும்மாறிச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டால் அதற்கு எந்தெந்த அமைப்புகளில் நேமவரையங்கள் அமைக்கலாம் என்பது பற்றிக் கூறப்பட்டது. இனி, மூன்று அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையத்தின் அமைப்பு கொடுக்கப்பட்டால் அது எந்தெந்த அமைப்புகளில் உள்ள சமன்பாடுகளுக்கு உரியதாக இருக்கும் என்பது பற்றிப் படிக்கலாம். இதற்குக் கீழ்க்கண்ட எட்டுவகை அமைப்புகளில் உள்ள நேமவரையங்களை ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

1. மூன்று வளைகோடுகள்
2. இரண்டு வளைகோடுகளும் ஒரு நேர்கோடும்
3. ஒரு வளைகோடும் இரண்டு இணையற்ற நேர்கோடுகளும்
4. ஒரு வளைகோடும் இரண்டு இணைகோடுகளும்
5. ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று நேர்கோடுகள்
6. ஒரு புள்ளியில் சந்திக்காததும் எந்த இரண்டும் இணையில்லாததுமான மூன்று நேர்கோடுகள்
7. இரண்டு இணைகோடுகளும் இவைகளுக்கு இணையில்லாத மற்றொரு நேர்கோடும்
8. மூன்று இணைகோடுகள்

1. மூன்று வளைகோடுகள்

கொடுக்கப்பட்ட நேமவரையத்தில் பொதுவாக மூன்று வளை கோடுகள் இருந்தால், அதற்குரிய வரையறைச் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} f_1(u) & g_1(u) & 1 \\ f_2(v) & g_2(v) & 1 \\ f_3(w) & g_3(w) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற அமைப்பில் இருக்கும். இச் சமன்பாட்டில் உள்ள அணிக் கோவையை விரித்தெழுதி

$$f_1(u)[g_2(v)-g_3(w)] + f_3(v)[g_3(w)-g_1(u)] + f_3(w)[g_1(u)-g_2(v)] = 0 \quad ..(1)$$

என்று சமன்பாட்டை எழுதிக் கொள்ளலாம். $f_1(u)$, $g_1(u)$, $f_2(v)$, $g_2(v)$, $f_3(w)$, $g_3(w)$ என்பனவற்றை முறையே U, U', V, V', W, W', என்று குறித்துக் கொண்டால் சமன்பாடு (1)-ஆனது

$$U(V'-W') + V(W'-U') + W(U'-V') = 0 \quad ...(A)$$

என்று மாறுபடும். இங்கு U, U' என்பன u-வின் சார்புகளாகும்; V, V' என்பன v-யின் சார்புகளாகும்; W, W' என்பன w-வின் சார்புகளாகும். எனவே (A) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு மூன்று வளைகோடுகளைக் கொண்ட நேமவரையம் (படம் 152) அமைக்கலாம். சமன்பாடு (A)-யில் வரும் U, U' என்பவைகளுக் கிடையேயோ, V, V' என்பவைகளுக்கிடையேயோ, W, W' என்பவைகளுக்கிடையேயோ நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருக்கக் கூடாது. அப்படி இருந்தால் அதற்கொத்த மாறியின் அளவு கோல் நேர்கோடாக இருக்கும்.

2. இரண்டு வளைகோடுகளும் ஒரு நேர்கோடும்

u-அளவுகோலுக்குரிய கோட்டை நேர்கோடாகவும், மற்ற இரண்டு அளவுகோல்களுக்கும் உரிய கோடுகளை வளைகோடுகளா கவும் கொள்க. பொதுத்தன்மைக்கு இழப்பின்றி u-அளவு கோலானது Y-அச்சின்மீது அமைவதாகக் கொள்ளலாம். எனவே u-அளவுகோலுக்கு $X=0$ அதாவது $f_1(u) = 0$. எனவே சமன் பாடு (1)-இலிருந்து

$$f_2(v)[g_3(w) - g_1(u)] + f_3(w)[g_1(u) - g_2(v)] = 0 \quad \ldots(2)$$

இப்பொழுது $g_1(u)$, $f_2(v)$, $g_2(v)$, $f_3(w)$, $g_3(w)$ என்பனவற்றை முறையே U, V, V', W, W' எனக் கொண்டால் சமன்பாடு (2)-ஆனது

$$V(W' - U) + W'(U - V') = 0$$

அதாவது $U(V - W) = VW' - WV' \quad \ldots (B)$

என்று மாறுபடும். எனவே (B) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு இரண்டு வளைகோடுகளும் (v, w-அளவுகோல்கள்), ஒரு நேர்கோடும் (u-அளவுகோல்) உள்ள நேமவரையம் (படம் 153) அமைக்கலாம். சமன்பாடு (B)-யில் வரும் V, V' என்பவைகளுக்கிடையேயோ, W, W' என்பவைகளுக்கிடையேயோ நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருக்கக்கூடாது.

அதிகாரம் ஏழில்,

$$f_1(u) = \frac{f_2(v) f_3(w) - f_4(v) f_5(w)}{f_2(v) - f_5(w)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும் முறையைக் காணலாம். இச்சமன்பாடு (B) வகைச் சமன்பாடாக இருப்ப தால், இதற்குரிய நேமவரையத்தில் u-அளவுகோல் ஒரு நேர் கோட்டின் மீதும, v, w-அளவுகோல்கள் இரண்டு வளைகோடுகளின் மீதும் அமைகின்றன.

3. ஒரு வளைகோடும் இரண்டு இணையற்ற நேர்கோடுகளும்

u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டு இணையற்ற நேர்கோடுகளின் மீதும், w-அளவுகோல் ஒரு வளைகோட்டின் மீதும் அமைவதாகக் கொள்க. u-அளவுகோல் Y-அச்சின் மீது அமைவதாகவும், u, v-அளவுகோல்கள் $(0, 0)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்வ தாகவும் கொள்ளலாம். எனவே $f_1(u) = 0$, $g_2(v) = mf_2(v)$. v-அளவுகோலுக்குரிய நேர்கோடு $(0, 0)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதால் இந்நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $Y = mX$ என்ற அமைப் பில் இருக்கும். எனவேதான், $g_2(v) = m f_2(v)$. இங்கு m ஒரு மாறிலி ஆகும். எனவே சமன்பாடு (1)-இலிருந்து,

$$f_2(v) \quad [g_3(w) - g_1(u)] + f_3(w)[g_1(u) - mf_2(v)] = 0$$

அதாவது

$$f_2(v)[g_3(w) - mf_3(w)] + f_3(w) g_1(u) = f_2(v) g_1(u) \quad \ldots (3)$$

இப்பொழுது $g_1(u)$, $f_2(v)$, $[g_3(w) - mf_3(w)]$, $f_3(w)$

என்பனவற்றை முறையே U, V, W, W' என்று குறித்துக் கொண்டால் சமன்பாடு (3)-ஆனது

$$VW + W'U = UV$$

$$\text{அதாவது } \frac{W}{U} + \frac{W'}{V} = 1 \qquad \ldots (C)$$

என்று மாறுபடும். v-அளவுகோலை u-அளவுகோலுக்குச் செங்குத்தாக அமைத்துக் கொண்டால் m-இன் மதிப்பு 0 ஆகும். இப்பொழுது $[g_3(w) - mf_3(w)]$ என்பதை W எனக் குறித்துக் கொள்ளாமல் $g_3(w)$ என்பதை W எனக் கொள்ளவேண்டும். என்வே u, v-அளவுகோல்கள் செங்குத்தாக இருந்தாலும் (C)-யின் அமைப்பே இறுதியாகக் கிடைக்கிறது. எனவே (C) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோடுகளும் (u, v-அளவுகோல்கள்) ஒரு வளைகோடும் (w-அளவுகோல்) உள்ள நேம வரையம் (படம் 154) அமைக்கலாம். இங்கு W, W' என்பவைகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருக்கக் கூடாது.

அதிகாரம் ஏழில்

$$\frac{1}{f_1(u)} + \frac{f_4(w)}{f_2(v)} = \frac{1}{f_3(w)}$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும் முறையைக் காணலாம். இச்சமன்பாடு (C) வகைச் சமன்பாடாக இருப்பதால் இதற்குரிய நேமவரையத்தில் u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டு வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்கோடுகளின் மீதும், w-அளவுகோல் ஒரு வளைகோட்டின் மீதும் அமைகின்றன.

4. ஒரு வளைகோடும் இரண்டு இணைகோடுகளும்

u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும், w-அளவுகோல் ஒரு வளைகோட்டின் மீதும் அமைவதாகக் கொள்க. u-அளவுகோல் Y-அச்சின் மீது அமைவதாகவும் கொள்க. எனவே $f_1(u) = 0$. v-அளவுகோல் Y அச்சுக்கு இணையான கோட்டின் மீது அமைவதால் $f_2(v) = k$. இங்கு k என்பது u, v-அளவுகோல்களுக்கிடையே உள்ள தூரம் ஆகும். எனவே சமன்பாடு (1)-இலிருந்து

$$k\,[g_3(w) - g_1(u)] + f_3(w)\,[g_1(u) - g_2(v)] = 0$$

அதாவது $g_1(u)\,[f_3(w) - k] - g_2(v)\,f_3(w) = -k g_3(w)$

அதாவது $$g_1(u) + g_2(v)\left[\frac{f_3(w)}{k - f_3(w)}\right] = \frac{k g_3(w)}{k - f_3(w)} \qquad \ldots(4)$$

இப்பொழுது $g_1(u),\ g_2(v),\ \left[\frac{f_3(w)}{k - f_3(w)}\right],\ \left[\frac{k g_3(w)}{k - f_3(w)}\right]$

என்பனவற்றை முறையே U, V, W, W' எனக் கொண்டால் சமன்பாடு (4)-ஆனது

$$U + VW = W' \qquad \ldots (D)$$

என்று மாறுபடும். எனவே (D) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு இரண்டு இணைகோடுகளும் (u, v-அளவுகோல்கள்), ஒரு வளைகோடும் (w-அளவுகோல்) உள்ள நேமவரையம் (படம் 155) அமைக்கலாம். இங்கு W, W' என்பவைகளுக்கிடையே நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருக்கக்கூடாது.

ஏழாம் அதிகாரத்தில்

$$f_1(u) + f_2(v)\,f_3(w) = f_4(w)$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும் முறையைக் காணலாம், இச்சமன்பாடு (D) வகைச் சமன்பாடாக இருப்பதால் இதற்குரிய நேமவரையத்தில் u, v-அளவுகோல்கள் இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும், w-அளவுகோல் ஒரு வளைகோட்டின் மீதும் அமைகின்றன.

5. ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று நேர்கோடுகள்

u, v, w-அளவுகோல்கள் (0, 0) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்வதாகவும், u-அளவுகோல் Y-அச்சின் மீது அமைவதாகவும் கொள்க. எனவே $f_1(u) = 0$, $g_2(v) = m\,f_2(v)$, $g_3(w) = m' f_3(w)$. இங்கு m, m' என்னும் மாறிலிகள் v, w-அளவுகோல்களின் சரிவுகள் (slopes) ஆகும். சமன்பாடு (1)-இலிருந்து,

$$f_2(v)\,[m' f_3(w) - g_1(u)] + f_3(w)\,[g_1(u) - m f_2(v)] = 0$$

அதாவது $g_1(u)\,[f_3(w) - f_2(v)] + (m' - m)\,f_2(v)\,f_3(w) = 0$

அதாவது $$\frac{g_1(u)}{m' - m}\,[f_3(w) - f_2(v)] + f_2(v)\,f_3(w) = 0 \qquad \ldots (5)$$

இப்பொழுது $\left[\frac{g_1(u)}{m'-m}\right]$, $f_2(v)$, $f_3(w)$ என்பனவற்றை முறையே U, V, W எனக்கொண்டால் சமன்பாடு (5)-ஆனது

$$U(W-V)+VW=0$$

அதாவது $$VW+UW=UV$$

அதாவது $$\frac{1}{U}+\frac{1}{V}=\frac{1}{W} \qquad \ldots (E)$$

என்று மாறுபடும். எனவே (E) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் மூன்று நேர்கோடுகள் உள்ள நேமவரையம் (படம் 156) அமைக்கலாம். இம்மூன்று நேர்கோடுகளில் ஏதேனும் இரண்டைச் செங்குத்தாக எடுத்துக்கொண்டால் வசதியாக இருக்கும். அதிகாரம் ஆறில் (E) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அளவுகோல்களைக் கொண்ட நேமவரையம் அமைத்தது நினைவிருக்கலாம்.

6. ஒரே புள்ளியில் சந்திக்காததும் எந்த இரண்டு இணையில்லாததுமான மூன்று நேர்கோடுகள்

u-அளவுகோல் Y-அச்சின் மீது அமைவதாகவும் u, v-அளவுகோல்கள் $(0,0)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்வதாகவும் கொள்க. எனவே $f_1(u)=0$, $g_2(v)=mf_2(v)$.

w-அளவுகோலுக்குரிய நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $Y=m'X+c$ என எழுதலாம். எனவே $g_3(w)=m'f_3(w)+c$. மேற்சொன்ன தொடர்புகளில் m, m', c என்பன மாறிலிகள் ஆகும். மேலும் $m'\neq m$, $c\neq 0$. $m'=m$ எனில் v, w-அளவுகோல்கள் இணையாகிவிடும். $c=0$ எனில் u, v, w-அளவுகோல்கள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்துவிடும். இப்பொழுது சமன்பாடு (1)-இலிருந்து,

$$f_2(v)\,[m'f_3(w)+c-g_1(u)]+f_3(w)\,[g_1(u)-mf_2(v)]=0$$

அதாவது

$$g_1(u)\,[f_3(w)-f_2(v)]+f_2(v)\,[m'f_3(w)-mf_3(w)+c]=0$$

அதாவது

$$\frac{g_1(u)}{m'-m}[f_3(w)-f_2(v)]+f_2(v)\left[f_3(w)+\frac{c}{m'-m}\right]=0 \qquad \ldots (6)$$

$\left[\frac{g_1(u)}{m'-m}\right]$, $f_2(v)$, $f_3(w)$, $\frac{c}{m'-m}$ என்பனவற்றை முறையே U, V, W, k எனக் கொண்டால் சமன்பாடு (6)-ஆனது

$$U(W-V)+V(W+k)=0$$

அதாவது $V(W+k)+UW=UV$

$$\text{அதாவது}\quad \frac{W+k}{U}+\frac{W}{V}=1 \qquad \ldots (F)$$

என்று மாறுபடும், u, v-அளவுகோல்களைச் செங்குத்தாக அமைத்துக் கொண்டால் $m=0$. இப்பொழுதும் நேமவரையத்திற்குரிய சமன்பாடு (F) வகையில்தான் இருக்கும். எனவே (F) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு, ஒரு புள்ளியில் சந்திக்காததும் எந்த இரண்டும் இணையில்லாததுமான மூன்று நேர்கோடுகளைக் கொண்ட நேம வரையம் (படம் 157) அமைக்கலாம்.

7. இரண்டு இணைகோடுகளும் இவைகளுக்கு இணையில்லாத மற்றொரு நேர்கோடும்

u, v—அளவுகோல்கள் இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும், w-அளவுகோல், u, v-அளவுகோல்களுக்கு இணையில்லாத மற்றொரு நேர்கோட்டின் மீதும் அமைவதாகக் கொள்க. u-அளவுகோல் Y-அச்சின் மீது அமைவதாகவும் கொள்க. எனவே $f_1(u)=0$, $f_2(v)=k$, $g_3(w)=mf_3(w)+c$. இங்கு k, m, c என்பன மாறிலிகள் ஆகும். சமன்பாடு (1)-இலிருந்து,

$$k\,[mf_3(w)+c-g_1(u)]+f_3(w)[g_1(u)-g_2(v)]=0$$

அதாவது $g_1(u)\,[f_3(w)-k]=g_2(v)\,f_3(w)-mk\,f_3(w)-kc$

அதாவது $[g_1(u)-c]\,[f_3(w)-k]=f_3(w)\,[g_2(v)-km-c]$

$$\text{அதாவது}\quad \frac{g_1(u)-c}{g_2(v)-km-c}=\frac{f_3(w)}{f_3(w)-k} \qquad \ldots (7)$$

இப்பொழுது $[g_1(u)-c]$, $[g_2(v)-km-c]$, $\left[\frac{f_3(w)}{f^3(w)-k}\right]$

என்பனவற்றை முறையே U, V, W எனக் கொண்டால் சமன்பாடு (7)-ஆனது

$$\frac{U}{V} = W \quad \ldots (G)$$

என்று மாறுபடும். எனவே (G) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு இரண்டு இணைகோடுகளும் (u, v-அளவுகோல்கள்), இவைகளுக்கு இணையில்லாத மற்றொரு நேர்கோடும் (w-அளவுகோல்) உள்ள நேமவரையம் (படம் 158) அமைக்கலாம். அதிகாரம் நான்கில் (G) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு இரண்டு இணைகோடுகளும் இவைகளுக்கு இணையில்லாத மற்றொரு நேர்கோடும் கொண்ட நேம வரையம் அமைத்தது நினைவிருக்கலாம்.

8. மூன்று இணைகோடுகள்

u - அளவுகோல் Y - அச்சின்மீது அமைவதாகவும், v, w - அளவுகோல்கள் முறையே $X = a+b$, $X = a$ என்ற கோடுகளின் மீது அமைவதாகவும் கொள்க. $f_1(u) = 0$, $f_2(v) = a+b$, $f_3(w) = a$. எனவே சமன்பாடு (1)-இலிருந்து

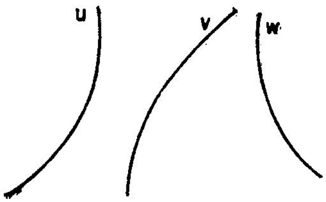
$$(a+b)\,[\,g_3(w) - g_1(u)\,] + a\,[g_1(u) - g_2(v)\,] = 0$$

அதாவது $(a+b)\,g_3(w) = bg_1(u) + ag_2(v)$ .. (8)

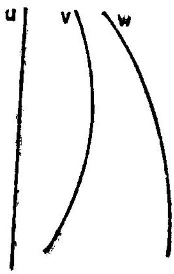
இப்பொழுது $bg_1(u)$, $ag_2(v)$, $(a+b)\,g_3(w)$ என்பவைகளை முறையே U, V, W எனக்கொண்டால் சமன்பாடு (8)-ஆனது

$$U + V = W \quad \ldots (H)$$

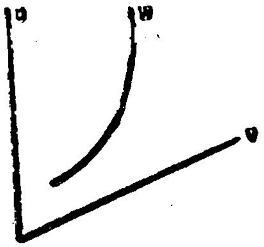
என்று மாறுபடும். எனவே (H) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு மூன்று இணைகோடுகள் உள்ள நேமவரையம் (படம் 159) அமைக்கலாம். அதிகாரம் மூன்றில் (H) வகைச் சமன்பாட்டுக்கு மூன்று இணை கோடுகளைக் கொண்ட நேமவரையம் அமைத்தது நினைவிருக்கலாம்.



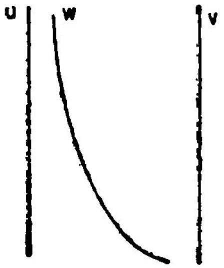
படம் 152



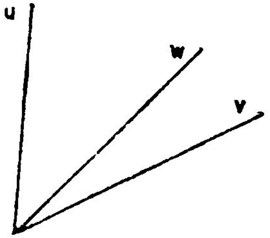
படம் 153



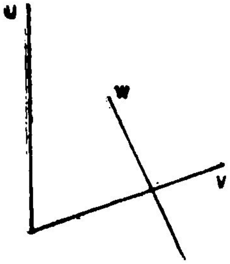
படம் 154



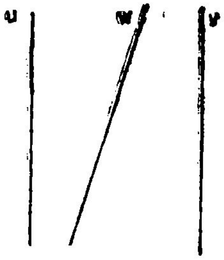
படம் 155



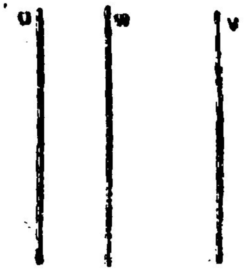
படம் 156



படம் 157



படம் 158



படம் 159

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து, தொகுமுறை வடிவியலைப் பயன்படுத்தி முந்திய அதிகாரங்களில் அமைத்த நேமவரையங்களின் பொது அமைப்புகள் முற்றிலும் சரியே என்பது புலனாகும்.

40. அணிக்கோவை முறையில் மூன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்கான நேமவரையம்

தொகுப்பு முறையில், மூன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கும்பொழுது அச்சமன்பாடு துணைமாறிகளின் உதவியால் பல்வேறு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொள்ளப்பட்டன. பின்னர்

ஒவ்வொரு மும்மாறிச் சமன்பாட்டுக்கும் நேமவரையம் அமைக்கப்பட்டு அவை ஒருங்கிணைக்கப்பட்டன. பிரித்து எழுதிக் கொள்ளப்பட்ட ஒவ்வொரு மும்மாறிச் சமன்பாட்டுக்கும் அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையம் அமைத்து அவற்றை ஒருங்கிணைத்தால் கிடைப்பது, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுக்கு அணிக்கோவை முறையில் அமைக்கப்பட்ட நேமவரையமாகும். கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொள்ளும்பொழுது q என்னும் துணைமாறியைப் பயன்படுத்துவதாகக் கொள்க. எனவே q - அளவுகோல் இரண்டு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளுக்கான நேமவரையங்களில் வரும். இந்த இரண்டு நேமவரையங்களுக்கும் ஒரே q-அளவுகோலையே பயன்படுத்தவேண்டும். எனவே ஒரு நேமவரையத்திற்கு அமைத்த அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டில் q அளவுகோலுக்குப் பயன்படுத்திய X, Y-ஆயங்களையே, மற்றொரு நேமவரையத்திற்கு அமைத்த அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டிலும் q அளவுகோலின் X, Y - ஆயங்களாகப் பயன்படுத்தவேண்டும். இதேபோன்று ஒவ்வொரு துணைமாறிக்கும் செய்யவேண்டும். இவ்வாறு செய்வதற்கு அணிக்கோவையைப் பற்றி நன்கு அறிந்திருக்கவேண்டும். ஆகவே மூன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்கு நேமவரையம் அமைக்கத் தொகுப்பு முறையே எளியது.

ஒரு சில சமன்பாடுகளைப் பல்வேறு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுதிக் கொள்ள முடியாமல் போகலாம். எடுத்துக்காட்டாக, a, b, c, x என்ற நான்கு மாறிகளைக் கொண்ட

$$ax^3 + bx + c = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை, ஒரு துணை மாறியின் உதவியால் இரண்டு மும்மாறிச் சமன்பாடுகளாகப் பிரித்து எழுத முடியாது. எனவே $ax^3 + bx + c = 0$ போன்ற சமன்பாட்டுக்குத் தொகுப்பு முறையிலோ அணிக்கோவை முறையிலோ ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட நேமவரையம் அமைக்கமுடியாது. எனினும் அணிக்கோவை முறையை அடிப்படையாகக் கொண்டு இதுபோன்ற சமன்பாட்டுக்கு வலையமைப்பு நேமவரையம் (grid nomogram அல்லது network nomogram) அமைக்கலாம். தொகுப்பு முறையில் இன்றி அணிக்கோவை முறைக்கே உரிய ஒரு நன்மை என இதைக் கூறலாம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில் வலையமைப்பு நேமவரையங்களை அமைக்கும் முறை விளக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 59

$ax^3 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. a (-1 முதல் 0 முடிய), b (0 - 100), c (0 - 100), x (5 - 10).

$ax^3 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x}{x+1} & -\dfrac{ax^3}{x+1} & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என எழுதிக் கொள்ளலாம். நேமவரையம் அமைப்பதற்கேற்ப இச் சமன்பாட்டை

$$\begin{vmatrix} \dfrac{8x}{x+1} & -\dfrac{ax^3}{10(x+1)} & 1 \\ 8 & \dfrac{b}{10} & 1 \\ 0 & \dfrac{c}{10} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்று மாற்றி அமைத்துக் கொள்க. c-அளவுகோலுக்கு $X = 0$, $Y = \dfrac{c}{10}$. எனவே c-அளவுகோலை Y-அச்சின் மீது ஒரு செ.மீ. நீளம் 10 அலகுகளைக் குறிக்குமாறு அமைக்க வேண்டும். b-அளவுகோலுக்கு $X = 8$, $Y = \dfrac{b}{10}$. எனவே b-அளவுகோலை $X = 8$ என்ற கோட்டின் மீது ஒரு செ.மீ. நீளம் 10 அலகுகளைக் குறிக்குமாறு அமைக்க வேண்டும் (படம் 160).

$$X = \frac{8x}{x+1}, \quad Y = -\frac{ax^3}{10(x+1)}$$ என்பனவற்றை

x-அளவுகோலுக்கான X, Y-ஆயங்கள் எனக் கொள்க. Y-ஆயத் [illegible] a என்றவாறு மாறியும் [illegible] பெறுகிறது. a-யின் மதிப்பு

மாற மாற Y-யின் மதிப்பு மாறுபடுவதால், a-யின் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரு X-வளைகோடு கிடைக்கும். எனவே $ax^3 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில் ஒரு x-வளைகோடு மட்டும் அல்லாமல், ஒரு தொகுதி (family) x-வளைகோடுகள் இருக்கும். a-யின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கான x-வளைகோடுகளை அமைக்கத் தேவையான கணக்கீடுகள் அட்டவணை 33-இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

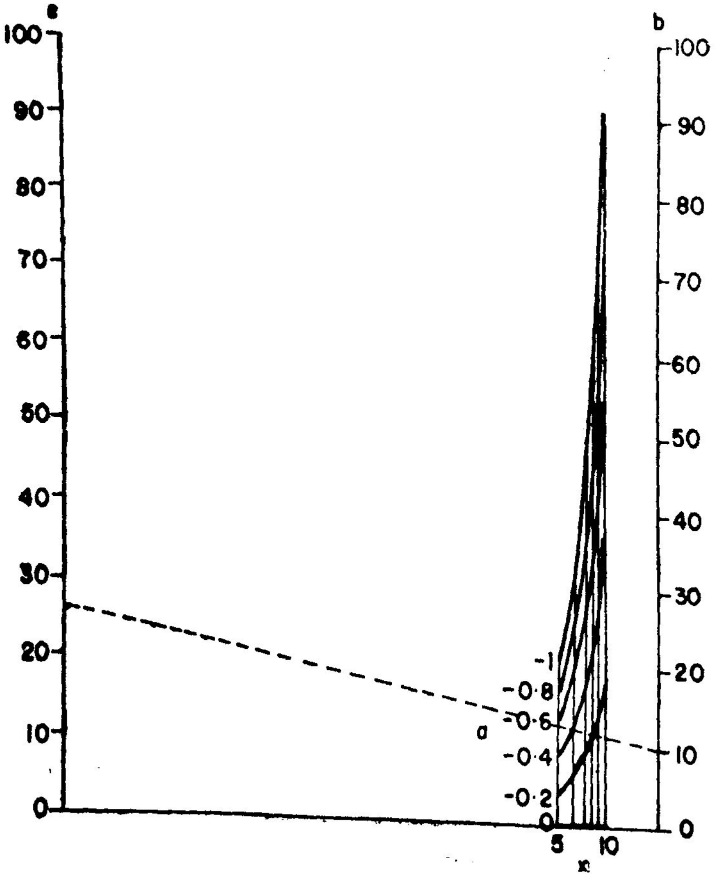
அட்டவணை 33

a	$x = 5$		$x = 6$		$x = 7$		$x = 8$		$x = 9$		$x = 10$	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0	6.67	0	6.86	0	7	0	7.11	0	7.2	0	7.27	0
—0.2	6.67	0.42	6.86	0.62	7	0.86	7.11	1.14	7.2	1.46	7.27	1.82
—0.4	6.67	0.83	6.86	1.23	7	1.72	7.11	2.28	7.2	2.92	7.27	3.64
—0.6	6.67	1.25	6.86	1.85	7	2.57	7.11	3.41	7.2	4.37	7.27	5.45
—0.8	6.67	1.67	6.86	2.47	7	3.43	7.11	4.55	7.2	5.83	7.27	7.27
—1.0	6.67	2.08	6.86	3.09	7	4.29	7.11	5.69	7.2	7.29	7.27	9.09

படம் 160-இல் —1 முதல் 0 முடிய உள்ள a-யின் மதிப்புகளுக்குரிய x-வளைகோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. இவ்வளைகோடுகள் ஒவ்வொன்றின் மீதும் உள்ள x-இன் சம மதிப்புக்குரிய புள்ளிகள் வழியாக ஓர் இழைவான வளைகோட்டை வரைந்து கொள்ளலாம். எனவே x-இன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரு வளைகோடு வீதம் வளைகோடுகளின் மற்றொரு தொகுதி கிடைக்கும். இத் தொகுதியில் உள்ள வளைகோடுகளை a-வளைகோடுகள் எனலாம்.

முதன் முதலில் வரையப்பட்ட x-வளைகோடுகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட a-மதிப்புக்கும், பின்னர் வரையப்பட்ட இரண்டாவது தொகுதி வளைகோடுகள் (படம் 160-இல் இவை நேர்கோடுகளாக இருப்பதைக் காண்க). ஒவ்வொன்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட x-மதிப்புக்கும் உரியன. இவ்வாறு $ax^3 + bx + c = 0$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில் வளைகோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளும் *b*, *c* என்ற இரண்டு அளவுகோல்களும் உள்ளன. வளைகோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளும் ஒரு வலை யமைப்பை (grid அல்லது network) உருவாக்குவதால் இந் நேம வரையத்தை வலையமைப்பு நேமவரையம் எனலாம்.



படம் 160

நான்கு மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்கு ஒருங்கிணைக் கப்பட்ட நேமவரையம் அமைத்தால், இரண்டு குறியிணைப்புக் கோடுகளைப் பயன்படுத்தவேண்டும். ஆனால் இப்பொழுது அமைக்கப்பட்டுள்ள வலையமைப்பு நேமவரையத்தில் ஒரே ஒரு குறியிணைப்புக் கோட்டைப் பயன்படுத்தினால் போதுமானது.

a, b, c இவற்றின் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால் x-இன் மதிப்பை எப்படிக் காண்பது? கொடுக்கப்பட்ட b, c- மதிப்புகளுக்குரிய புள்ளிகளை ஒரு நேர்கோட்டால் இணைக்க வேண்டும். இக் கோடும் கொடுக்கப்பட்ட a-யின் மதிப்புக்குரிய x-வளைகோடும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிக்கான x-இன் மதிப்பே தேவையான x-மதிப்பாகும்.

$a = -0.4$, $b = 10$, $c = 26.4$ எனில் $x = 6$ என்பதைப் படத்தில் வரையப்பட்டுள்ள குறியிணைப்புக் கோட்டிலிருந்து தெரிந்து கொள்ளலாம்.

படம் 160-இல் x-வளைகோடுகள் அமைக்கப்பட்ட பின்னர் a-வளைகோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. இவ்வாறு செய்யாமல் முதலில் a-வளைகோடுகளை அமைத்து, அதன் பின்னர் x-வளைகோடுகளை வரைந்தும் வலையமைப்பு நேமவரையத்தை அமைக்கலாம்.

$ax^3 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தொகுப்பு முறையிலும் வலையமைப்பு நேமவரையம் அமைக்க முடியும். கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் $a = -1$ எனப் பதிலீடு செய்தால் $-x^3 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். இச் சமன்பாட்டுக்கு, b, c-அளவுகோல்களை இரண்டு இணைகோடுகளின் மீதும், x-அளவுகோலை ஒரு வளைகோட்டின் மீதும் அமைத்து நேமவரையத்தை அமைத்துக் கொள்ளவேண்டும். பிறகு கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் $a = -0.8$ எனப் பதிலீடு செய்தால் $-0.8x^3 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும். $-x^3 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குப் பயன்படுத்திய அதே b, c-அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி, $-0.8x^3 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமைக்க வேண்டும். இவ்வாறு, a-யின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்குக் கிடைக்கக் கூடிய சமன்பாடுகளுக்கு அதே b, c-அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி நேமவரையங்களை அமைத்தால் பல்வேறு x-அளவுகோல்கள் கிடைக்கும். பின்னர் x-இன் சம மதிப்புக்குரிய புள்ளிகள் வழியாக இழைவான வளைகோடுகள் வரைந்தால் a-வளைகோடுகள் கிடைக்கும்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் நான்கு மாறிச் சமன்பாட்டுக்கு வலையமைப்பு நேமவரையம் அமைக்கும் முறை கூறப்பட்டது. ஐந்து அல்லது ஆறு மாறிச் சமன்பாட்டுக்கும் அணிக்கோவை முறையைப் பயன்படுத்தி வலையமைப்பு நேமவரையம் அமைக்கலாம். சமன்பாட்டில் எத்தனை மாறிகள் இருப்பினும், மூன்று

புள்ளிகள் ஒரு நேர்கோட்டின் மீது அமைய வேண்டும் என்ற அடிப்படையில்தான் நேமவ்ரையம் அமைக்கப்படுகிறது. நான்கு மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில், குறியிணைப்புக் கோட்டின் ஒரு புள்ளி ஏதேனும் ஒரு மாறிக்குரிய அளவுகோல் மீதும், இரண்டாவது புள்ளி இன்னொரு மாறிக்குரிய அளவுகோல் மீதும், மூன்றுவது புள்ளி மீதி இரண்டு மாறிகளுக்குரிய அளவுகோல்களின் வலையமைப்பின் மீதும் உள்ளன. இதேபோல் ஐந்து மாறிகளைக் கொண்ட சமன் பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தில், குறியிணைப்புக் கோட்டின் ஒரு புள்ளி ஏதேனும் ஒரு மாறிக்குரிய அளவுகோல் மீதும், இரண்டாவது புள்ளி ஏதேனும் மற்ற இரண்டு மாறிகளுக்குரிய அளவு கோல்களின் வலையமைப்பின் மீதும், மூன்றுவது புள்ளி மீதி இரண்டு மாறிகளுக்குரிய அளவுகோல்களின் வலையமைப்பின் மீதும் இருக்கும். ஆறு மாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுக் குரிய நேமவரையத்தில், வளைகோடுகளின் இரண்டு தொகுதிகளைக் கொண்ட மூன்று வலையமைப்புகள் இருக்கும். ஒரு வலையமைப் பின்மீது ஒரு புள்ளி வீதம் குறியிணைப்புக்கோடுகளுக்குரிய மூன்று புள்ளிகளும் இருக்கும்.

பயிற்சி

1. $f_1(u) + f_2(v)\, f_3(w) = f_4(w)$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தின் வரையறைச் சமன்பாட்டை எழுக.

2. $\dfrac{1}{u} + \dfrac{w}{v} = \dfrac{1}{w^2}$ என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத் தின் வரையறைச் சமன்பாட்டை எழுதுக.

3. $u = w v^{w}$ எனில் $\begin{vmatrix} 0 & -\log u & 1 \\ 1 & -\log v & 1 \\ \dfrac{w}{w-1} & \dfrac{\log w}{w-1} & 1 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

4. $uv = w$ என்ற சமன்பாட்டை $\begin{vmatrix} u & u^2 & 1 \\ -v & v^2 & 1 \\ 0 & w & 1 \end{vmatrix} = 0$

என மாற்றியமைக்க இயலுமா ? இயலுமென்றால் இந்த அணிக்கோவைச் சமன்பாட்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு $uv = w$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. $u(1 - 5)$; $v(3 - 10)$

5.
$$\begin{vmatrix} u & u^3 & 1 \\ 0 & 3\log v & 1 \\ 5 & w-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. $u(0 - 3)$; $v(1 - 1000)$; $w(1 - 10)$.

6.
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குரிய நேமவரையத்தை அமை. $a(1 - 10)$; $b(1 - 10)$.

7.
$$\begin{vmatrix} \sin u & \cos u & 1 \\ \cos v & \sin v & 1 \\ w & w & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என்ற சமன்பாட்டுக்கு ஒரு நேமவரையம் அமை. w (-10 முதல் 10 முடிய)

8. $L = 4.61\log\left(\frac{d}{r}\right) + 0.5$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையம் அமை. $d(2{\cdot}5 - 100)$; $r(0.1 - 0.35)$.

9. $E_1^3 = 429\, d^2 I$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையம் அமை. $d(0.15 - 0.5)$; $I(7 - 100)$

10. $A = \frac{D^2}{8} (\theta - \sin\theta)$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையம் அமை.

D = வட்டத்தின் விட்டம், (1-10) செ. மீ.

θ = வட்டவில் (circular arc) வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணம், $(0 - \pi)$ ஆரையன் அளவை

A = வட்டத் துண்டின் பரப்பு.

11. $r = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1}$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அணிக்கோவை முறையில் நேமவ்ரையம் அமை. r (0-15); r_1 (0-15); r_2 (0-20)

12. $uv + 4v^2w + 6wu^2 = 6u^2v^2 + 2vw + 2wu$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு அணிக்கோவை முறையில் நேமவரையம் அமை. u (0 - 5); v (0 - 5); w (0 - 30).

13. $a^{b-c} b^{c-a} c^{a-b} = 1$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வகையில் a, b, c என்பவற்றிற்கு, சமமற்ற (unequal) மெய் மதிப்புகள் இருக்கமுடியாது என்பதை அணிக்கோவை முறையில் நேமவ்ரையம் அமைப்பதைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு வலையமைப்பு நேமவரையங்கள் அமை (14-16).

14. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

s = கடந்து சென்ற தூரம், (5 - 15) மீட்டர்

u = தொடக்கத் திசைவேகம், (0 - 10) மீ./நொடி

a = முடுக்கம் (acceleration), (0 - 4) மீ./நொடி^{2}

t = நேரம், (1 - 5) நொடி

15. $t_1 = t_2 c^{\theta}$

t_1 (0 - 400); t_2 (2 - 500); c (1.5 - 4); θ (—50 முதல் 50 முடிய)

16. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

x (0.5 - 2); a (—10 முதல்—5 முடிய); b (0 - 10); c (0 - 10).

மடக்கைகள்

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

மடக்கைகள்

											Mean Differences								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9235	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

எதிர் மடக்கைகள்

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2686	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

எதிர் மடக்கைகள்

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

கோண கணிதப் பட்டியல்கள்

பாகை	ஆரையன்	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Cosec		
0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-----	1.0000	-----	1.5708	90
1	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	1.0002	57.299	1.5533	89
2	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	1.0006	28.654	1.5359	88
3	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	1.0014	19.107	1.5184	87
4	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	1.0024	14.336	1.5010	86
5	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	1.0038	11.474	1.4835	85
6	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	1.4661	84
7	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.0075	8.2055	1.4486	83
8	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	1.4312	82
9	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	1.4137	81
10	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	1.3963	80
11	0 1920	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	1.3788	79
12	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	1.3614	78
13	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	1.3439	77
14	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	1.3265	76
15	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	1.3090	75
16	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	1.2915	74
17	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	1.2741	73
18	0.3142	0.3090	0 9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	1.2566	72
19	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	1.2392	71
20	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	1.2217	70
21	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	1.2043	69
22	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	1.1868	68
23	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	1.1694	67
24	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	1.1519	66
25	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	1.1345	65
26	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	1.1170	64
27	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	1.0996	63
28	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	1.0821	62
29	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	1.0647	61
30	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.1547	2.0000	1.0472	60
31	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	1.0297	59
32	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	1.0123	58
33	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	0.9948	57
34	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	0.9774	56
35	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	0.9599	55
36	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7043	0.9425	54
37	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	0.9250	53
38	0.6632	0.6157	0 7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	0.9076	52
39	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	0.8901	51
40	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	0.8727	50
41	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	0.8552	49
42	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	0.8378	48
43	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	0.8203	47
44	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	0.8029	46
45	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	0.7854	45
		Cos	Sin	Cot	Tan	Cosec	Sec	ஆரையன்	பாகை

இடப்பக்கம் உள்ள பாகைகளுக்கு, மேலே உள்ள தலைப்புகளையும் வலப்பக்கம் உள்ள பாகைகளுக்குக் கீழே உள்ள தலைப்புகளையும் பயன்படுத்தவேண்டும்.

கோண கணிதச் சார்புகளின் மடக்கைப் பட்டியல்கள்

பாகை	log Rad	log Sin	log Cos	log Tan	log Cot	log Sec	log Cosec		
0	----	---	10.0000	---	----	10.0000	----	10.1961	90
1	8.2419	8.2419	9.9999	8.2419	11.7581	10.0001	11.7581	10.1913	89
2	8.5429	8.5428	9.9997	8.5431	11.4569	10.0003	11.4572	10.1864	88
3	8.7190	8.7188	9.9994	8.7194	11.2806	10.0006	11.2812	10.1814	87
4	8.8439	8.8436	9.9989	8.8446	11.1554	10.0011	11.1564	10.1764	86
5	8.9408	8.9403	9.9983	8.9420	11.0580	10.0017	11.0597	10.1713	85
6	9.0200	9.0192	9.9976	9.0216	10.9784	10.0024	10.9808	10.1662	84
7	9.0870	9.0859	9.9968	9.0891	10.9109	10.0032	10.9141	10.1610	83
8	9.1450	9.1436	9.9958	9.1478	10.8522	10.0042	10.8564	10.1557	82
9	9.1961	9.1943	9.9946	9.1997	10.8003	10.0054	10.8057	10.1504	81
10	9.2419	9.2397	9.9934	9.2463	10.7537	10.0066	10.7603	10.1450	80
11	9.2833	9.2806	9.9919	9.2887	10.7113	10.0081	10.7194	10.1395	79
12	9.3211	9.3179	9.9904	9.3275	10.6725	10.0096	10.6821	10.1340	78
13	9.3558	9.3521	9.9887	9.3634	10.6366	10.0113	10.6479	10.1284	77
14	9.3880	9.3837	9.9869	9.3968	10.6032	10.0131	10.6163	10.1227	76
15	9.4180	9.4130	9.9849	9.4281	10.5719	10.0151	10.5870	10.1169	75
16	9.4460	9.4403	9.9828	9.4575	10.5425	10.0172	10.5597	10.1111	74
17	9.4723	9.4659	9.9806	9.4853	10.5147	10.0194	10.5341	10.1052	73
18	9.4971	9.4900	9.9782	9.5118	10.4882	10.0218	10.5100	10.0992	72
19	9.5206	9.5126	9.9757	9.5370	10.4630	10.0243	10.4874	10.0931	71
20	9.5429	9.5341	9.9730	9.5611	10.4389	10.0270	10.4659	10.0870	70
21	9.5641	9.5543	9.9702	9.5842	10.4158	10.0298	10.4457	10.0807	69
22	9.5843	9.5736	9.9672	9.6064	10.3936	10.0328	10.4264	10.0744	68
23	9.6036	9.5919	9.9640	9.6279	10.3721	10.0360	10.4081	10.0680	67
24	9.6221	9.6093	9.9607	9.6486	10.3514	10.0393	10.3907	10.0614	66
25	9.6398	9.6259	9.9573	9.6687	10.3313	10.0427	10.3741	10.0548	65
26	9.6569	9.6418	9.9537	9.6882	10.3118	10.0463	10.3582	10.0481	64
27	9.6732	9.6570	9.9499	9.7072	10.2928	10.0501	10.3430	10.0412	63
28	9.6890	9.6716	9.9459	9.7257	10.2743	10.0541	10.3284	10.0343	62
29	9.7042	9.6856	9.9418	9.7438	10.2562	10.0582	10.3144	10.0272	61
30	9.7190	9.6990	9.9375	9.7614	10.2386	10.0625	10.3010	10.0200	60
31	9.7332	9.7118	9.9331	9.7788	10.2212	10.0669	10.2682	10.0127	59
32	9.7470	9.7242	9.9284	9.7958	10.2042	10.0716	10.2758	10.0053	58
33	9.7604	9.7361	9.9236	9.8125	10.1875	10.0764	10.2639	9.9978	57
34	9.7734	9.7476	9.9186	9.8290	10.1710	10.0814	10.2524	9.9901	56
35	9.7859	9.7586	9.9134	9.8452	10.1548	10.0866	10.2414	9.9822	55
36	9.7982	9.7692	9.9080	9.8613	10.1387	10.0920	10.2308	9.9743	54
37	9.8101	9.7795	9.9023	9.8771	10.1229	10.0977	10.2205	9.9662	53
38	9.8217	9.7893	9.8965	9.8928	10.1072	10.1035	10.2107	9.9579	52
39	9.8329	9.7989	9.8905	9.9084	10.0916	10.1095	10.2011	9.9494	51
40	9.8439	9.8081	9.8843	9.9238	10.0762	10.1157	10.1919	9.9408	50
41	9.8547	9.8169	9.8778	9.9392	10.0608	10.1222	10.1831	9.9321	49
42	9.8651	9.8255	9.8711	9.9544	10.0456	10.1289	10.1745	9.9231	48
43	9.8753	9.8338	9.8641	9.9697	10.0303	10.1359	10.1662	9.9140	47
44	9.8853	9.8418	9.8569	9.9848	10.0152	10.1431	10.1582	9.9046	46
45	9.8951	9.8495	9.8495	10.0000	10.0000	10.1505	10.1505	9.8951	45
		log Cos	log Sin	log Cot	log Tan	log Cosec	log Sec	log Rad	பாகை

இடப் பக்கம் உள்ள பாகைகளுக்கு, மேலே உள்ள தலைப்புகளையும், வலப் பக்கம் உள்ள பாகைகளுக்குக் கீழே உள்ள தலைப்புகளையும் பயன்படுத்தவேண்டும். பட்டியலில் உள்ள மடக்கை மதிப்புகளிலிருந்து 10-ஐக் கழித்துப் படித்தால்தான் சரியான மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

Log Rad என்பது ஆரையன் அளவையின் மடக்கை ஆகும்,

பார்வை நூல்கள்

வரிசை எண்	ஆசிரியர்	நூலின் பெயர்	பதிப்பகம்	ஆண்டு
1.	Adams, Douglas P.	Nomography: Theory and Application	Shoe String	1964
2.	Allcock and Reginald Jones J.	The Nomogram	Issac Pitman	1952
3.	Brodetsky, S.	A first Course in Nomography	Bell and Sons	1949
4.	Davis, Dale S.	Nomography and Empirical Equations	Reinhold	1962
5.	Davis, Dale S. and Kulwiec, Raymond A.	Chemical Processing Nomographs	Chemical Publishing Co.	1969
6.	Douglass, Raymond D. and Adams, Douglas P.	Elements of Nomography	McGraw-Hill	1947
7.	Epstein, L.I.	Nomography	Wiley	1958
8.	Fasal John	Nomography	Ungar	1968
9.	French, Thomas E. and Vierck, Charles J.	Graphic Science	McGraw-Hill	1958
10.	Johnson, Lee H.	Nomography and Empirical Equations	Wiley	1962
11.	Kuong, Javier F	Applied Nomography (Vol. I, II and III)	Gulf	1965 68 & 69
12.	Levens, A.S.	Nomography	Wiley	1959
13.	Louis Toft and McKay, A.D.D.	Practical Mathematics (Vol. II)	Issac Pitman	1960
14.	Marks, A.S.C.	Line Chart for Engineers	Iliffe	1967
15.	Otto Edward	Nomography	Pergamon	1964
16.	Walter Herbert Burrows	Graphic Techniques for Engineering Computations	Chemical Publishing Co.	1965

கலைச்சொற்கள்

தமிழ் - ஆங்கிலம்

அகலம்	Width
அக்ரிலிக் ஒற்றை உறுப்பி	Acrylic monomer
அங்குலம்	Inch
அசல்	Principal
அச்சு	Axis
அச்சுத்தூரம்	Co-ordinate
அடர்த்தி	Density
அடர்த்தி எண்	Specific gravity
அடி	Base
அடிக்கோல்	Foot rule
அடிப்பக்கம்	Base
அடிப்படை அளவை அலகு	Basic unit of measurement
அடுக்குக்குறிக் கோவை	Exponential expression
அடுக்குக்குறிச் சமன்பாடு	Exponential equation
அடுத்திலா அளவுகோல்கள்	Non-adjacent scales
அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள்	Adjacent scales
அடுத்துள்ள பக்கங்கள்	Adjacent sides
அட்டவணை	Table
அட்டவணைப்படுத்து	Tabulate
அணிக்கோவை	Determinant
அணிக்கோவை அமைப்பு	Determinantal form
அணிக்கோவைச் சமன்பாடு	Determinantal equation
அணிக்கோவை முறை	Determinant method
அதிர்வு அலைவெண்	Vibration frequency
அமை	Construct
அமைப்பு	Form
அமைப்பு மாற்றக் கூறு	Mapping factor
அமைப்பு முறை	Construction
அமைப்புமுறை அணிக்கோவைச் சமன்பாடு	Constructional determinantal equation
அம்மோனியா	Ammonia
அரை உச்சிக் கோணம்	Semi vertical angle

அரோமேட்டிக் ஹைட்ரோ கார்பன் — Aromatic hydrocarbon
அலகு — Unit
அலைவு நேரம் — Period
அலைவெண் — Frequency
அழுத்தம் — Pressure
அளக்கும் சுற்றுவழி — Measuring circuit
அளவீடு — Calibration
அளவு — Size
அளவுகோல் — Scale
அளவுகோல் குணகம் — Scale modulus
அளவுகோல் சமன்பாடு — Scale equation
அளவுகோல் நீளம் — Scale length
அளவுக் குறியிடு — Graduate
அளவுக் குறியீடு — Graduation
அளவை — Measurement
அனல்மிகு நிலக்கரி — Anthracite coal

ஆக்ஸிஜன் — Oxygen
ஆதி — Origin
ஆம்பியர் — Ampere
ஆயம் — Co-ordinate
ஆரம் — Radius
ஆரை நேமவரையம் — Radial nomogram
ஆரையன் அளவை — Radian measure
ஆல்கஹால் — Alcohol
ஆவி அழுத்தம் — Vapour pressure
ஆழம் — Depth
ஆற்றல் — Energy

இடது குறியீடு — Left index
இடப்பெயர்ச்சிக் கோணம் — Displacement angle
இடப்பெயர்ச்சி விகிதம் — Diplacement ratio
இடைநிலை — Intermediate
இடைநிலை மாறி — Intermediate variable
இடைவெளி — Interval
இணைகோடுகள் — Parallel lines
இணைகோடுகள் முறை — Method of parallel lines
இணைக்குறியிணைப்புக் கோடுகள் — Parallel index lines
இணைப்பு விளக்கப் படம் — Alignment chart

இணையளவுகோல் அளவு மாற்ற விளக்கப்படம் — Parallel scale conversion chart
இணையளவுகோல்கள் — Parallel scales
இணையளவுகோல் நேமவரையம் — Parallel scale nomogram
இணையான — Parallel
இணைவகம் — Parallelogram
இயக்க அழுத்தம் — Dynamic pressure
இயக்கச் சமன்பாடு — Equation of motion
இயக்குமைய அளவுகோல் — Pivotal scale
இயக்குமையக் கோடு — Pivotal line
இயக்குமையப் புள்ளி — Pivotal point
இயந்திரக் கருவி — Mechanical device
இயந்திரத் தண்டு — Shaft
இயந்திர நுணுக்கம் — Mechanism
இயல்பு — Nature
இயல் மடக்கை — Natural logarithm
இயற் கணித முறை — Algebraic method
இயற் கணிதம் — Algebra
இயற்பியல் — Physics
இரட்டை — Pair
இரட்டைத் திருப்புதிறன் — Torque
இரண்டாம்நிலை அணிக்கோவை — Second order determinant
இரு சுற்று மடக்கை அளவுகோல் — Two cycle logarithmic scale
இருபடி — Square
இருபடி அளவுகோல் — Square scale
இருபடிச் சமன்பாடு — Quadratic equation
இருபடி மூல அளவுகோல் — Square root scale
இருபடி மூலம் — Square root
இருப்பிடம் — Position
இருமாறிச் சமன்பாடு — Two variable equation
இரு முனை இடைநீளம் — Span
இழுவைக் கெழு — Drag coefficient
இழைத் தகைவு — Fibre stress
இழைவான — Smooth
இழைவான வளைகோடு — Smooth curve
இறக்கை முனை இடை நீளம் — Wing span
இறுக்கக் குணகம் — Compression modulus
இறுக்கப்பட்ட வாயு — Compressed gas
இறுக்கப் [illegible] — Compression

ஈத்தைல் அக்ரிலேட் — Ethyl acrylate
ஈத்தைல் மெத்தாக்ரிலேட்டு — Ethyl methacrylate
ஈர்ப்பு முடுக்கம் — Acceleration due to gravity
ஈர்ப்பு மையம் — Centre of gravity

உச்சி — Vertex
உடற்பகுதி — Body
உட்பிரிவு — Subdivision
உத்தரம் — Beam
உந்து — Car
உயரம் — Height
உராய்வுக் கூறு — Friction factor
உருச்சுருக்கக் கூறு — Reduction factor
உருப்பெருக்கக் கூறு — Enlargement factor
உருளை — Cylinder
உலோகம் — Metal
உள் மின்தடை — Internal resistance
உள்ளீடற்ற — Hollow

எடுத்துக்காட்டு — Example
எடை — Weight
எட்டாப்புள்ளி — Point at infinity
எண்சார் வழி — Numerical device
எண்ணிக்கையிடுதல் — Numbering
எண் மதிப்பு — Magnitude
எதிர் மடக்கை — Antilogarithm
எரிகாற்று — Combustion air
எரிமம் — Fuel
எர்கு — Erg
எல்லை வேறுபாடு — Range

ஐந்துபடி மூலம் — Fifth root

ஒத்த — Corresponding
ஒப்பீடு — Comparison
ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட நேமவரையம் — Combined nomogram
ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட படலக்கெழு — Combined film coefficient
ஒருங்கிணைப்பு — Combination
ஒருசுற்று மடக்கை அளவுகோல் — One cycle logarithmic scale
ஒருபடி அளவுகோல் — Linear scale

ஒருபடிச் சமன்பாடு	— Linear equation
ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அளவு கோல்கள்	— Concurrent scales
ஒளியளவி	— Photometer
ஒளியியல்	— Optics
ஒளிவிலகல் எண்	— Refractive index
ஒற்றைத் தாங்கி உத்தரம்	— Cantilever beam
ஒற்றை நிலை	— Single phase
ஒன்றுக் குறி	— One mark
ஒன்றுவிட்டு ஒன்றுள்ள	— Alternate
ஓம்	— Ohm
கட்டுப்பாடு	— Condition
கணக்கிடு	— Calculate
கணக்கீடு	— Calculation, Computation
கணக்குப் பொறி	— Calculator
கணிதப் பட்டியல்கள்	— Mathematical tables
கதிர் வீசல்	— Radiation
கந்தக அமிலம்	— Sulphuric acid
கம்பி	— Wire
கம்பி வடம்	— Cable
கரைசல்	— Solution
கரைதிறன்	— Solubility
கரைபொருள்	— Solute
கர்ணம்	— Hypotenuse
கலிங்கு	— Weir
கற்பனை எண்	— Imaginary number
கற்பனை மூலம்	— Imaginary root
கனஅளவு	— Volume
கனிமப் பொருள்	— Mineral grain
காட்டி	— Cursor
கார்டீசியன் ஆயங்கள்	— Cartesian co-ordinates
கார்டீசியன் ஆய விளக்கப்படம்	— Cartesian co-ordinate chart
கார்பன்	— Carbon
கிடை அச்சு	— Horizontal axis
கிடை அடிக்கோடு	— Horizontal base line

கிடை அழுக்கம்	— Horizontal thrust
கிடை இழுவிசை	— Horizontal tension
கிடைக் கோடு	— Horizontal line
கிடைத்தளம்	— Horizontal plane
கிடைவிட்டம்	— Horizontal diameter
கிராம்	— Gram
கிலோகிராம்	— Kilogram
கிலோமீட்டர்	— Kilometre
கிலோவாட்டு	— Kilowatt
கிலோவோல்ட்டு ஆம்பியர்	— Kilovolt ampere
கீழ் எல்லை	— Lower limit
கீழ்க்குறி	— Suffix
கீறு	— Stroke
குணக விளக்கப்படம்	— Modulus chart
குத்தாயம்	— Ordinate
குத்துயரம்	— Altitude
குவியத் தூரம்	— Focal length
குளோரின் மோனொக்சைடு	— Chlorine Monoxide
குறி	— Mark, Sign
குறிமாற்றப்பட்ட	— Changed in sign
குறியிணைப்புக் கோடு	— Index line
குறியீட்டுக் குணகம்	— Plotting modulus
குறியீட்டுச் சமன்பாடு	— Plotting equation
குறுக்குக் கோடு	— Transverse line
குறுக்குக் கோட்டு அளவுகோல்	— Transverse scale
குறுக்குப் பெருக்கு	— Cross multiply
குறுக்கு வெட்டு விளக்கப்படம்	— Cross-section chart
குறுங்கோணம்	— Acute angle
குறை உருச்சுருக்கம்	— Negative reduction
குறை உருப்பெருக்கம்	— Negative enlargement
குறை எண்	— Negative number
குறைக் குறி	— Negative sign
குறைக் குறியீட்டுக் குணகம்	— Negative plotting modulus
குறை மூலம்	— Negative root
குறையும் சார்பு	— Decreasing function
குறைவுபடுத்து	— Decrease

கூடு — Shell
கூடும் சார்பு — Increasing function
கூட்டுத்தொகை — Amount, Sum
கூட்டும் இயந்திரம் — Adding machine
கூட்டு வட்டி — Compound interest
கூறு — Factor

கெப்ளரின் சமன்பாடு — Kepler's equation
கெப்ளரின் மூன்றாம் விதி — Kepler's third law
கெழு — Coefficient

கொண்மி — Condenser

கோடுகளின் தொகுதி — Family of lines
கோட்பாடு — Principle
கோணஅளவி — Protractor
கோணஅளவை — Angular measurement
கோண கணிதச் சமன்பாடு — Trigonometric equation
கோண கணிதச் சார்பு — Trigonometric function
கோண கணிதப் பட்டியல்கள் — Trigonometric tables
கோணம் — Angle
கோவை — Expression
கோளத்துண்டு — Spherical segment
கோளம் — Sphere
கோள் — Planet

சந்திப்பு — Junction
சம இடைவெளி — Equal interval
சமபக்க முக்கோணம் — Equilateral triangle
சமமற்ற — Unequal
சமன்பாடு — Equation
சமன்பாட்டுக் கொள்கை — Theory of equation
சரிவகம் — Trapezium
சரிவு — Slope
சரிவு அச்சுகள் — Oblique axes
சறுக்குப் பெயர்ச்சித் தகைவு — Shearing stress
சாதனம் — Equipment
சார்பு — Function
சார்பு அளவுகோல் — Functional scale
சார்பு மதிப்பு — Functional value

சிதைவு மாறிலி — Disintegration constant
சிறப்பு நழுவு கணிப்பான் — Special slide rule
சிறுமம் — Minimum
சிற்றச்சு — Minor axis

சீரமைப்புக் கூறு — Adjusting factor
சீரிலா அளவுகோல் — Non-uniform scale
சீர் அளவுகோல் — Uniform scale

சுருள் — Coil
சுழல் ஆரம் — Radius of gyration
சுழற்சி அச்சு — Axis of rotation
சுழி — Zero
சுழிக் குறி — Zero mark
சுற்று — Cycle
சுற்றுப்பாதை — Orbit

செங்குத்தான — Perpendicular
செங்குத்து அச்சுகள் — Perpendicular axes
செங்குத்துக் குறியிணைப்புக் கோடுகள் — Perpendicular index lines
செங்கோண முக்கோணம் — Right angled triangle
செங்கோணம் — Right angle
செவ்வகம் — Rectangle
செறிவு — Concentration
சென்டி பாய்சு — Centipoise
சென்டி மீட்டர் — Centimetre
சென்டி ஸ்டோக்கு — Centistoke

சொரசொரப்புக் கெழு — Roughness coefficient

சோடியம் ஹைட்ராக்சைடு — Sodium hydroxide
சோதனை — Experiment
சோதனைத் துண்டு — Test piece
சோதனைப் பிழை முறை — Trial and error method

டி ஒகேனின் அமைப்பு — D'ocagne's form

தகைவு — Stress
தடிப்பு — Thickness
தண்டு — Stem

தலைகீழ் — Reciprocal
தலைகீழ் அளவுகோல் — Reciprocal scale
தளவடிவியல் — Plane geometry
தாற்காலிக அளவுகோல் — Temporary scale
தனி ஊசல் — Simple pendulum
தனி வெப்பநிலை — Absolute temperature

திசைவேகம் — Velocity
திருச்சுழல் கோணம் — Helix angle
திறப்பாடு — Efficiency
திறப்புச் சுற்றுவழி — Open circuit
திறன் — Power
திறன் இழப்பு — Power loss

தீர்வு — Solution

துணைமாறி — Auxiliary variable
துணையளவுகோல் — Auxiliary scale
துண்டு — Segment
துத்தநாகக் குளோரைடு — Zinc chloride
துத்தநாகச் சல்ஃபேட்டு — Zinc sulphate
துவாரம் — Hole
துளை — Orifice
துளை செய்யப்பட்ட அட்டை — Punch card

தூண்டம் — Inductance
தூரம் — Distance

தேரா அமைப்பு — Indeterminate form

தொகுதி — Family, Set
தொகுப்பு முறை — Synthetic method
தொகுப்பு வகுத்தல் முறை — Synthetic division method
தொகுமுறை வடிவியல் — Synthetic geometry
தொடக்கத் திசைவேகம் — Initial velocity
தொடக்கப் புள்ளி — Zero point
தொடுகோடு — Tangent
தொடுபுள்ளி — Point of contact
தொய்வு — Sag
தொலைத் தொடுகோடு — Asymptote

நசெல்ட்டின் எண்	— Nusselt's number
நழுவி	— Slide
நழுவிச்செல்லும் அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள்	— Sliding adjacent scales
நழுவு கணிப்பான்	— Slide rule
நாஃப்தெனிக் ஹைட்ரோகார்பன்	— Napthenic hydrocarbon
நாடா	— Tape
நாண்	— Chord
நான்கு மாறிச் சமன்பாடு	— Four variable equation
நிகர்	— Equivalent
நிகழ்ச்சி நிரல்	— Programme
நிரல்	— Column
நிரை	— Row
நிலைக்குத்து அச்சு	— Veritical axis
நிலைக்குத்துக் கோடு	— Veritical line
நிலைப்புள்ளி	— Fixed point
நிலைமட்டம்	— Head
நிலைமத் திருப்புதிறன்	— Moment of inertia
நிலையான அடுத்துள்ள அளவு கோல்கள்	— Stationary adjacent scales
நிருவல்	— Proof
நிருவு	— Prove
நிறை - அடர்த்தி	— Mass - density
நிறையற்ற நீரியக் கரைசல்	— Saturated aqueous solution
நிறைவுசெய்யும்	— Satisfying
நீக்கம்செய்	— Eliminate
நீட்சி வலிமை	— Tensile strength
நீரியல் ஆரம்	— Hydraulic radius
நீர்ப்படலக் கெழு	— Water film coefficient
நீர்மம்	— Liquid
நீள்வட்டம்	— Ellipse
நூற்றுவீதம்	— Percentage
நெடுக்கம்	— Range
நேப்பியர் மடக்கை	— Napier logarithm
நேமவரையம்	— Nomogram

நேமவரைவியல்	— Nomography
நேமவரைவு	— Nomograph
நேமவரைவு முறைகள்	— Nomographic methods
நேரம்	— Time
நேர்கோடு	— Straight line
நேர்கோட்டு ஆயவிளக்கப் படம்	— Line co-ordinate chart
நேர்கோட்டுத் தொடர்பு	— Linear relation
நொடி	— Second
நோக்கு விகிதம்	— Aspect ratio
பகுதி அழுத்தம்	— Partial pressure
பகுப்பு முறை	— Analytic method
பகுமுறை வடிவியல்	— Analytic geometry
படி	— Power
படித்தர அமைப்பு	— Standard form
படித்தர அளவுகோல்கள்	— Standard scales
படிமூலம்	— Root
படுகோணம்	— Angle of incidence
பட்டியல்	— Table
பதிலிடு	— Substitute
பதிலீடு	— Substitution
பயனுறு குணகம்	— Effective modulus
பரப்பு	— Area
பரவளைய நேமவரையம்	— Parabolic nomogram
பரவளையம்	— Parabola
பரிதி	— Circumference
பருப்பொருள்	— Material, Matter
பவுண்டு	— Pound
பாகை	— Degree
பாதரசம்	— Mercury
பாரஃப்பினிக் ஹைட்ரோ கார்பன்	— Paraffinic hydrocarbon
பிசுப்புமை	— Viscosity
பிம்பம்	— Image
பியூட்டைல் மெத்தாக்ரிலேட்டு	— Butyl methacrylate

பிரிவு — Division
பிழை — Error

புகைப்புள்ளிச் சுடர் — Smoke point flame
புதுமைக் கணிப்பொறி — Modern computer
புரியிடைத் தூரம் — Pitch
புலவலிமை — Field intensity
புள்ளி — Point
புள்ளிவழிக் கோடுகள் முறை — Lines through a point method
புறமாற்றம் செய் — Transpose
புற மின்தடை — External Resistance
புறவொழுக்கு நேரம் — Time of efflux

பெருக்குத் தொகை — Product
பெருக்கும் மாறிலி — Multiplying constant
பெரும உயரம் — Maximum height
பெருமச் சுமை — Maximum load
பெருமத் திருப்புத்திறன் — Maximum moment
பெருமம் — Maximum
பெரும விலக்கம் — Maximum deflection

பேசினின் கெழு — Bazin's coefficient
பேரச்சு — Major axis

பொதுக் கொள்கை — General theory
பொதுப்பண்பு — Property
பொது மடக்கை — Common logarithm
பொதுவான — Common
பொருத்தக் கோடு — Matching line
பொருத்தப் புள்ளி — Matching point
பொறி — Engine

மடக்கை — Logarithm
மடக்கை அளவுகோல் — Logarithmic scale
மடக்கைச் சார்பு — Logarithmic function
மடக்கைப் பட்டியல்கள் — Logarithmic tables
மடக்கை மடக்கை அளவுகோல் — Log Log scale
மடக்கை மடக்கை வரை படத்தாள் — Log Log graph paper
மடிப்பு — Fold

மட்டாயம்	— Abscissa
மணிச்சட்டம்	— Abacus
மணித்துளி	— Minute
மதிப்பிறக்கம்	— Depreciation
மதிப்பு	— Value
மதிப்பெண்	— Mark
மந்த வாயு	— Inert gas
மறு பகர்ப்பு	— Repetition
மாறி	— Variable
மாறிலி உறுப்பு	— Constant term
மாறு மின்னோட்டம்	— Alternating current
மிகுதிப்படுத்து	— Increase
மிகை எண்	— Positive number
மிகை மதிப்பு	— Positive value
மிகை மூலம்	— Positive root
மில்லி மீட்டர்	— Millimetre
மில்லி லிட்டர்	— Millilitre
மின்கலத் தொகுதி	— Battery
மின்கல வெப்பநிலை	— Cell temperature
மின் கொண்மை	— Electrical capacity
மின்தடை	— Resistance
மின்பகுபொருள்	— Electrolyte
மின்னணுக் கணிப்பொறி	— Electronic computer
மின்னணுக் கருவி	— Electronic device
மின்னழுத்தச் சீர்மை	— Voltage regulation
மின்னழுத்தம்	— Electric potential
மின்னியக்கு விசை	— Electromotive force
மின்னியல்	— Electricity
மின்னோட்டம்	— Current
மீட்சிக் குணகம்	— Modulus of elasticity
மீட்டர்	— Metre
மீண்டும்வரும் மாறி	— Recurrent variable
மீத்தைல் அக்ரிலேட்டு	— Methyl acrylate
மீத்தைல் மெத்தாக்ரிலேட்டு	— Methyl methacrylate
மீபரவளையம்	— Hyperbolo

முகப்பு — Dial
முச்சுற்று மடக்கை அளவுகோல் — Three cycle logarithmic scale
முடிப்புச் சுற்றுவழி — Close circuit
முடிவிலி — Infinity
முடிவிலிக் குறி — Infinity mark
முடிவு — Result
முடுக்கம் — Acceleration
முதற் குறி — First mark
முதன்மை அளவுகோல் — Primary scale
முதன்மையான — Principal
முத்தனிம அமைப்பு — Ternary system
முப்படி — Cube
முப்படி அளவுகோல் — Cubic scale
முப்படிச் சமன்பாடு — Cubic equation
முப்படி மூலம் — Cube root
மும்மாறிச் சமன்பாடு — Three variable equation
முழு எண் — Integer
முழுதொத்த — Identical
முறிவுச் சுமை — Breaking load
முறிவுத் திரிபு — Breaking strain
முறுக்குக் குணகம் — Torsional modulus
முறை — Method
முற்று மின்னழுத்தம் — Terminal voltage
முனை — End
முனைப்புள்ளி — Extremity

மூலகம் — Element
மூலக்கூறு — Mole
மூலம் — Root
மூலைமட்டக் கருவி — Set square
மூலைவிட்டக் கோடு — Diagonal line
மூலைவிட்டம் — Diagonal
மூன்றாம் நிலை அணிக்கோவை — Third order determinant

மெய் எண் — Real number
மெய் மதிப்பு — Real value
மெய் மூலம் — Real root
மென்மைக் கூறு — Softness factor

மேல் எல்லை	— Upper limit
மேற்பரப்பு	— Surface area
மைக்ரான்	— Micron
மைக்ரோஃபாரடு	— Microfarad
மைக்ரோஹென்றி	— Microhenry
மையப் பிறழ்ச்சி	— Eccentricity
மையம்	— Centre
மையவிலக்கு விசை	— Centrifugal force
மைல்	— Mile
யங்கின் குணகம்	— Young's modulus
ரப்பர்	— Rubber
ரெனால்டின் எண்	— Reynold's number
லிட்டர்	— Litre
வகை	— Type
வடிவியல்	— Geometry
வடிவியற் கோட்பாடு	— Geometrical principle
வடிவொத்த முக்கோணங்கள்	— Similar triangles
வட்ட அளவுகோல்	— Circular scale
வட்ட நேமவரையம்	— Circular nomogram
வட்ட நேர்க் கூம்பு	— Right circular cone
வட்டம்	— Circle
வட்ட வில்	— Circular arc
வரிப்பள்ளம்	— Groove
வருகைக் குறிப்பு	— Attendance
வரைபட முறை	— Graphical method
வரைபடம்	— Graph
வரைபட வழி	— Graphical device
வரையறை	— Definition
வரையறைச் சமன்பாடு	— Defining equation
வலது குறியீடு	— Right index
வலையமைப்பு	— Grid, Network
வலையமைப்பு நேமவரையம்	— Grid nomogram, Network nomogram
வலையமைப்பு விளக்கப்படம்	— Network chart

வளைகோடு	— Curve
வளைகோட்டு அளவுகோல்	— Curved scale
வளைகோட்டுத் தூரம்	— Arcual distance
வளைவு ஆரம்	— Radius of curvature
வளைவு திருப்புதிறன்	— Bending moment
வாட்டு	— Watt
வாயு	— Gas
வாயுப்படலக் கெழு	— Gas film coefficient
வாய்பாடு	— Formula
வானூர்தி	— Airplane
விகிதசமமான	— Proportional
விகிதசம விளக்கப்படம்	— Proportional chart
விகிதம்	— Ratio
விக்செரின் கெட்டிமை எண்	— Vicker's hardness number
விசிறி விளக்கப்படம்	— Fan chart
விட்டம்	— Diameter
விட்டாகரின் அமைப்பு	— Whittakar's form
விதி	— Law
விரிகோணம்	— Obtuse angle
விலகுகோணம்	— Angle of refraction
விலக்கம்	— Deflection
விவரங்கள்	— Data
விளக்கப்படம்	— Chart
விளிம்பு	— Edge
விறைப்புக் குணகம்	— Rigidity modulus
வீதம்	— Rate
வெட்டிக்கொள்ளும் நேர் கோடுகள்	— Intersecting straight lines
வெப்ப அளவி	— Thermometer
வெப்ப நியுட்ரான்	— Thermal neutron
வெப்பநிலை	— Temperature
வெப்ப மதிப்பு	— Thermal value
வெப்ப மாற்றக்கெழு	— Heat Transfer coefficient
வெப்ப மாற்றம்	— Heat Transfer
வெளியேற்றக் கெழு	— Coefficient of discharge

வெளியேற்றம் — Discharge
வெள்ளி நைட்ரேட்டு — Silver nitrate

வேகம் — Speed
வேதியியல் — Chemistry
வேறுபாடு — Difference
வேறுபாட்டு விகிதம் — Contrast ratio

வோல்ட்டு — Volt

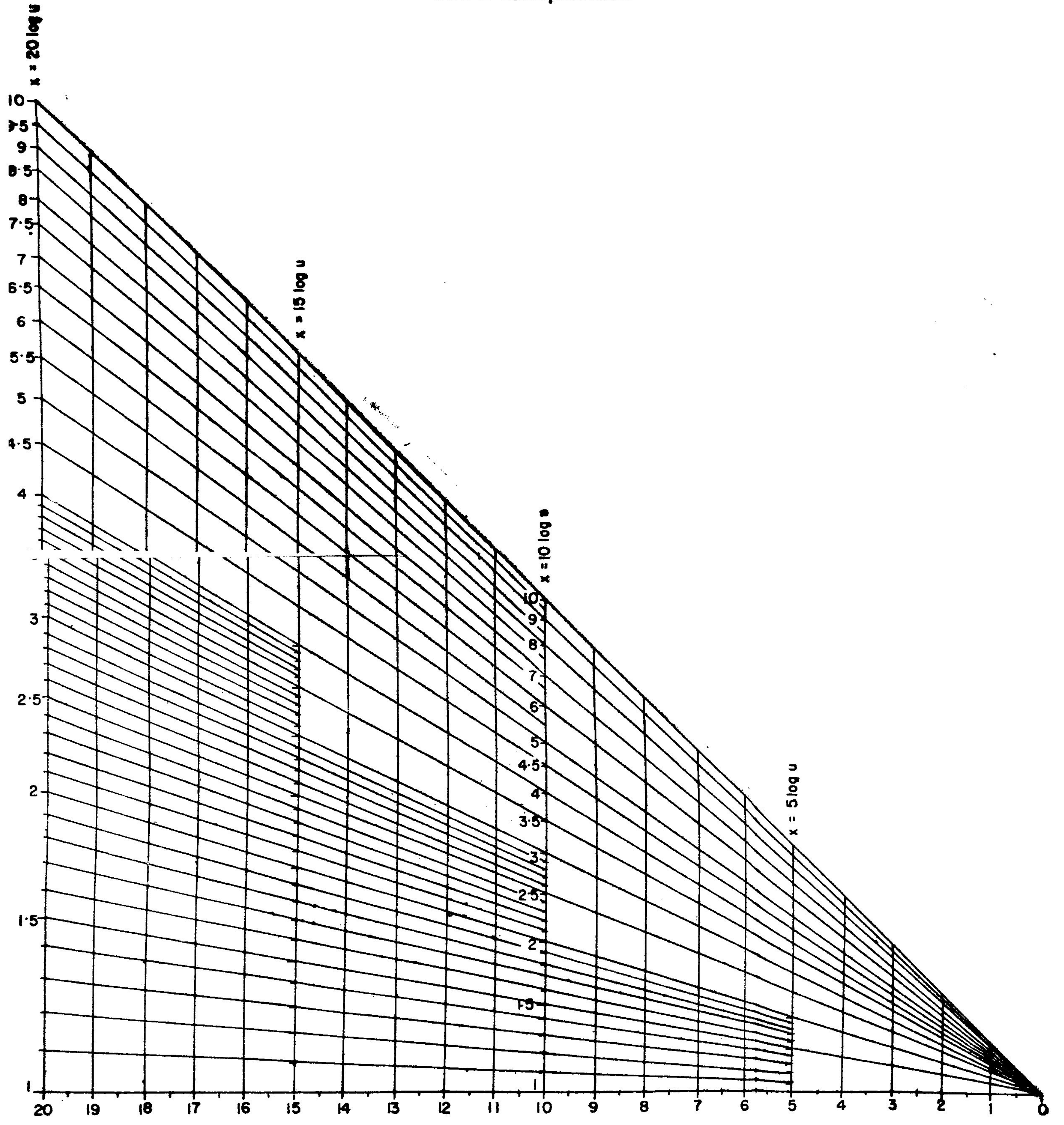
ஹாமில்டன் சுமித் வாய்பாடு — Hamilton Smith formula

ஹைட்ரஜன் — Hydrogen

F-விளக்கப்படம் — F-Chart
n-ஆவது மாறி — nth variable
n-மாறிச் சமன்பாடு — n-variable equation
N-விளக்கப்படம் — N-chart
T-வடிவ வரைகருவி — T-square
X-அச்சு — X-axis
Y-அச்சு — Y-axis
Z-விளக்கப்படம் — Z-chart

இணைப்பு

மடக்கை அளவுகோல்கள்



கலைச்சொற்கள்

—o—

ஆங்கிலம் - தமிழ்

A

Abacus — மணிச்சட்டம்
Abscissa — மட்டாயம்
Absolute temperature — தனி வெப்பநிலை
Acceleration — முடுக்கம்
Accelelaration due to gravity — ஈர்ப்பு முடுக்கம்
Acrylic monomer — அக்ரிலிக் ஒற்றை உறுப்பி
Acute angle — குறுங்கோணம்
Adding machine — கூட்டும் இயந்திரம்
Adjacent scales — அடுத்துள்ள அளவுகோல்கள்
Adjacent sides — அடுத்துள்ள பக்கங்கள்
Adjusting factor — சீரமைப்புக் கூறு
Airplane — வானூர்தி
Alcohol — ஆல்கஹால்
Algebra — இயற்கணிதம்
Algebraic method — இயற்கணித முறை
Alignment chart — இணைப்பு விளக்கப்படம்
Alternate — ஒன்றுவிட்டு ஒன்றுள்ள
Alternating current — மாறு மின்னோட்டம்
Altitude — குத்துயரம்
Ammonia — அம்மோனியா
Amount — கூட்டுத் தொகை
Ampere — ஆம்பியர்
Analytic geometry — பகுமுறை வடிவியல்
Analytic method — பகுப்பு முறை
Angle — கோணம்
Angle of incidence — படுகோணம்
Angle of refraction — விலகு கோணம்
Angular measurement — கோண அளவை
Anthracite coal — அனல்மிகு நிலக்கரி
Antilogarithm — எதிர் மடக்கை

Arcual distance — வளைகோட்டுத் தூரம்
Area — பரப்பு
Aromatic hydrocarbon — அரோமேட்டிக் ஹைட்ரோ கார்பன்
Aspect ratio — நோக்கு விகிதம்
Asymptote — தொலைத் தொடுகோடு
Attendance — வருகைக் குறிப்பு
Auxiliary scale — துணையளவுகோல்
Auxiliary variable — துணை மாறி
Axis — அச்சு
Axis of rotation — சுழற்சி அச்சு

B

Base — அடி, அடிப்பக்கம்
Bacic unit of measurement — அடிப்படை அளவை அலகு
Battery — மின்கலத் தொகுதி
Bazin's coefficient — பேசினின் கெழு
Beam — உத்தரம்
Bending moment — வளைவு திருப்புதிறன்
Body — உடற்பகுதி
Breaking load — முறிவுச் சுமை
Breaking strain — முறிவுத் திரிபு
Butyl methacrylate — பியூட்டைல்மெத்தா க்ரிலேட்டு

C

Cable — கம்பி வடம்
Calculate — கணக்கிடு
Calculation — கணக்கீடு
Calculator — கணக்குப் பொறி
Calibration — அளவீடு
Cantilever beam — ஒற்றைத் தாங்கி உத்தரம்
Car — உந்து
Carbon — கார்பன்
Cartesian co-ordinate chart — கார்டீசியன்ஆயவிளக்கப்படம்
Cartesian co-ordinates — கார்டீசியன் ஆயங்கள்
Cell temperature — மின்கல வெப்பநிலை
Centimetre — சென்டி மீட்டர்
Centipoise — சென்டி பாய்சு
Centistoke — சென்டிஸ்டோக்கு

Centre — மையம்
Centre of gravity — ஈர்ப்பு மையம்
Centrifugal force — மைய விலக்கு விசை
Changed in sign — குறிமாற்றப்பட்ட
Chart — விளக்கப்படம்
Chemistry — வேதியியல்
Chlorine monoxide — குளோரின் மோனுக்சைடு
Chord — நாண்
Circle — வட்டம்
Circular arc — வட்ட வில்
Circular nomogram — வட்ட நேமவரையம்
Circular scale — வட்ட அளவுகோல்
Circumference — பரிதி
Closed circuit — முடிப்புச் சுற்றுவழி
Coefficient — கெழு
Coefficient of discharge — வெளியேற்றக் கெழு
Coil — சுருள்
Column — நிரல்
Combination — ஒருங்கிணைப்பு
Combined film coefficient — ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட படலக் கெழு
Combined nomogram — ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட நேம வரையம்
Combustion air — எரிகாற்று
Common — பொதுவான
Common logarithm — பொது மடக்கை
Comparison — ஒப்பீடு
Compound interest — கூட்டு வட்டி
Compressed gas — இறுக்கப்பட்ட வாயு
Compression — இறுக்கம்
Compression modulus — இறுக்கக் குணகம்
Computation — கணக்கீடு
Concentration — செறிவு
Concurrent scales — ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் அளவுகோல்கள்
Condenser — கொண்மி
Condition — கட்டுப்பாடு
Constant term — மாறிலி உறுப்பு
Construct — அமை
Construction — அமைப்பு முறை

Constructional determinantal *equation*	—	அமைப்பு முறை அணிக்கோவைச் சமன்பாடு
Contrast ratio	—	வேறுபாட்டு விகிதம்
Co-ordinate	—	அச்சுத்தூரம், ஆயம்
Corresponding	—	ஒத்த
Cross multiply	—	குறுக்குப் பெருக்கு
Cross-section chart	—	குறுக்குவெட்டு விளக்கப்படம்
Cube	—	முப்படி
Cube root	—	முப்படி மூலம்
Cubic equation	—	முப்படிச் சமன்பாடு
Cubic scale	—	முப்படி அளவுகோல்
Current	—	மின்னோட்டம்
Cursor	—	காட்டி
Curve	—	வளைகோடு
Curved scale	—	வளைகோட்டு அளவுகோல்
Cycle	—	சுற்று
Cylinder	—	உருளை

D

Data	—	விவரங்கள்
Decrease	—	குறைவுபடுத்து
Decreasing function	—	குறையும் சார்பு
Defining equation	—	வரையறைச் சமன்பாடு
Definition	—	வரையறை
Deflection	—	விலக்கம்
Degree	—	பாகை
Density	—	அடர்த்தி
Depreciation	—	மதிப்பிறக்கம்
Depth	—	ஆழம்
Determinant	—	அணிக்கோவை
Determinantal equation	—	அணிக்கோவைச் சமன்பாடு
Determinantal form	—	அணிக்கோவை அமைப்பு
Determinant method	—	அணிக்கோவை முறை
Diagonal	—	மூலைவிட்டம்
Diagonal line	—	மூலைவிட்டக் கோடு
Dial	—	முகப்பு
Diameter	—	விட்டம்
Difference	—	வேறுபாடு
Discharge	—	வெளியேற்றம்

Disintegration constant — சிதைவு மாறிலி
Displacement angle — இடப்பெயர்ச்சிக் கோணம்
Displacement ratio — இடப்பெயர்ச்சி விகிதம்
Distance — தூரம்
Division — பிரிவு
D'ocagne's form — டி ஒகேனின் அமைப்பு
Drag coefficient — இழுவைக் கெழு
Dynamic pressure — இயக்க அழுத்தம்

E

Eccentricity — மையப் பிறழ்ச்சி
Edge — விளிம்பு
Effective modulus — பயனுறு குணகம்
Efficiency — திறப்பாடு
Electrical capacity — மின் கொண்மை
Electricity — மின்னியல்
Electric potential — மின்னழுத்தம்
Electrolyte — மின்பகுபொருள்
Electromotive force — மின்னியக்கு விசை
Electronic computer — மின்னணுக் கணிப்பொறி
Electronic device — மின்னணுக் கருவி
Element — மூலகம்
Eliminate — நீக்கம் செய்
Ellipse — நீள் வட்டம்
End — முனை
Energy — ஆற்றல்
Engine — பொறி
Enlargement factor — உருப்பெருக்கக் கூறு
Equal interval — சம இடைவெளி
Equation — சமன்பாடு
Equation of motion — இயக்கச் சமன்பாடு
Equilateral triangle — சமபக்க முக்கோணம்
Equipment — சாதனம்
Equivalent — நிகர்
Erg — எர்கு
Error — பிழை
Ethyl acrylate — ஈத்தைல் அக்ரிலேட்டு
Ethyl methacrylate — ஈத்தைல் மெத்தாக்ரிலேட்டு
Example — எடுத்துக்காட்டு

Experiment — சோதனை
Exponential equation — அடுக்குக்குறிச் சமன்பாடு
Exponential expression — அடுக்குக்குறிக் கோவை
Expression — கோவை
External resistance — புறமின்தடை
Extremity — முனைப்புள்ளி

F

Factor — கூறு
Family — தொகுதி
Family of lines — கோடுகளின் தொகுதி
Fan chart — விசிறி விளக்கப்படம்
F-chart — F-விளக்கப்படம்
Fibre stress — இழைத் தகைவு
Field intensity — புலவலிமை
Fifth root — ஐந்துபடிமூலம்
First mark — முதற்குறி
Fixed point — நிலைப்புள்ளி
Focal length — குவியத் தூரம்
Fold — மடிப்பு
Foot rule — அடிக்கோல்
Form — அமைப்பு
Formula — வாய்பாடு
Four variable equation — நான்கு மாறிச் சமன்பாடு
Frequency — அலைவெண்
Friction factor — உராய்வுக் கூறு
Fuel — எரிமம்
Function — சார்பு
Fuuctional scale — சார்பு அளவுகோல்
Functional value — சார்பு மதிப்பு

G

Gas — வாயு
Gas film coefficient — வாயுப் படலக் கெழு
General theory — பொதுக் கொள்கை
Geometrical principle — வடிவியற் கோட்பாடு
Geometry — வடிவியல்
Graduate — அளவுக்குறியிடு

Graduation — அளவுக்குறியீடு
Gram — கிராம்
Graph — வரைபடம்
Graphical device — வரைபட வழி
Graphical method — வரைபட முறை
Grid — வலையமைப்பு
Grid nomogram — வலையமைப்பு நேமவரையம்
Groove — வரிப்பள்ளம்

H

Hamilton Smith formula — ஹாமில்டன் சுமித்வாய்பாடு
Head — நிலைமட்டம்
Heat transfer — வெப்ப மாற்றம்
Heat transfer coefficient — வெப்ப மாற்றக் கெழு
Height — உயரம்
Helix angle — திருகு சுழல் கோணம்
Hole — துவாரம்
Hollow — உள்ளீடற்ற
Horizontal axis — கிடை அச்சு
,, base line — கிடை அடிக்கோடு
,, diameter — கிடை விட்டம்
,, line — கிடைக் கோடு
,, plane — கிடைத் தளம்
,, tension — கிடை இழுவிசை
,, thrust — கிடை அமுக்கம்
Hydraulic radius — நீரியல் ஆரம்
Hydrogen — ஹைட்ரஜன்
Hyperbola — மீபரவளையம்
Hypotenuse — கர்ணம்

I

Identical — முழுதொத்த
Image — பிம்பம்
Imaginary number — கற்பனை எண்
Imaginary root — கற்பனை மூலம்
Inch — அங்குலம்
Increase — மிகுதிப்படுத்து
Increasing function — கூடும் சார்பு
Indeterminate form — தேரா அமைப்பு

Index line — குறியிணைப்புக் கோடு
Inductance — தூண்டம்
Inert gas — மந்த வாயு
Infinity — முடிவிலி
Infinity mark — முடிவிலிக் குறி
Initial velocity — தொடக்கத் திசைவேகம்
Integer — முழு எண்
Intermediate — இடைநிலை
Intermediate variable — இடைநிலை மாறி
Internal resistance — உள் மின்தடை
Intersecting straight lines — வெட்டிக் கொள்ளும் நேர் கோடுகள்
Interval — இடைவெளி

J

Junction — சந்திப்பு

K

Kepler's equation — கெப்ளரின் சமன்பாடு
Kepler's third law — கெப்ளரின் மூன்றும் விதி
Kilogram — கிலோகிராம்
Kilometre — கிலோ மீட்டர்
Kilovolt ampere — கிலோ வோல்ட்டு ஆம்பியர்
Kilowatt — கிலோவாட்டு

L

Law — விதி
Left index — இடது குறியீடு
Linear equation — ஒருபடிச் சமன்பாடு
Linear relation — நேர்கோட்டுத் தொடர்பு
Linear scale — ஒருபடி அளவுகோல்
Line co-ordinate chart — நேர்கோட்டு ஆய விளக்கப் படம்
Lines through a point method— புள்ளிவழிக் கோடுகள் முறை
Liquid — நீர்மம்
Litre — லிட்டர்
Logarithm — மடக்கை
Logarithmic function — மடக்கைச் சார்பு
Logarithmic scale — மடக்கை அளவுகோல்
Logarithmic tables — மடக்கைப் பட்டியல்கள்

Log log graph paper — மடக்கை மடக்கை வரை படத்தாள்
Log log scale — மடக்கை மடக்கை அளவு கோல்
Lower limit — கீழ் எல்லை

M

Magnitude — எண் மதிப்பு
Major axis — பேரச்சு
Mapping factor — அமைப்பு மாற்றக் கூறு
Mark — குறி, மதிப்பெண்
Mass-density — நிறை - அடர்த்தி
Matching line — பொருத்தக் கோடு
Matching point — பொருத்தப் புள்ளி
Material — பருப்பொருள்
Mathematical tables — கணிதப் பட்டியல்கள்
Matter — பருப் பொருள்
Maximum — பெருமம்
Maximum deflection — பெரும விலக்கம்
Maximum height — பெரும உயரம்
Maximum load — பெருமச் சுமை
Maximum moment — பெருமத் திருப்புதிறன்
Measurement — அளவை
Measuring circuit — அளக்கும் சுற்றுவழி
Mechanical device — இயந்திரக் கருவி
Mechanism — இயந்திர நுணுக்கம்
Mercury — பாதரசம்
Metal — உலோகம்
Method — முறை
Method of parallel lines — இணைக் கோடுகள் முறை
Methyl acrylate — மீத்தைல் அக்ரிலேட்டு
Methyl methacrylate — மீத்தைல் மெத்தாக்ரிலேட்டு
Metre — மீட்டர்
Microfarad — மைக்ரோ ஃபாரடு
Microhenry — மைக்ரோ ஹென்றி
Micron — மைக்ரான்
Mile — மைல்
Millilitre — மில்லி லிட்டர்
Millimetre — மில்லி மீட்டர்
Mineral grain — கனிமப் பொருள்

Minimum — சிறுமம்
Minor axis — சிற்றச்சு
Minute — மணித்துளி
Modern computer — புதுமைக் கணிப்பொறி
Modulus chart — குணக விளக்கப்படம்
Modulus of elasticity — மீட்சிக் குணகம்
Mole — மூலக்கூறு
Moment of inertia — நிலைமத் திருப்புதிறன்
Multiplying constant — பெருக்கும் மாறிலி

N

Napier logarithm — நேப்பியர் மடக்கை
Napthenic hydro carbon — நாஃப்தெனிக் ஹைட்ரோ கார்பன்
Natural logarithm — இயல்மடக்கை
Nature — இயல்பு
N chart — N விளக்கப்படம்
Negative enlargement — குறை உருப்பெருக்கம்
Negative number — குறை எண்
Negative plotting modulus — குறைக் குறியீட்டுக் குணகம்
Negative reduction — குறை உருச்சுருக்கம்
Negative root — குறை மூலம்
Negative sign — குறைக் குறி
Network — வலையமைப்பு
Network chart — வலையமைப்பு விளக்கப்படம்
Network nomogram — வலையமைப்பு நேமவரையம்
Nomogram — நேமவரையம்
Nomograph — நேமவரைவு
Nomographic methods — நேமவரைவு முறைகள்
Nomography — நேமவரைவியல்
Non-adjacent scales — அடுத்திலா அளவுகோல்கள்
Non-uniform scale — சீரிலா அளவுகோல்
n th variable — n ஆவது மாறி
Numbering — எண்ணிக்கையிடுதல்
Numerical device — எண்சார் வழி
Nusselt's number — நசெல்ட்டின் எண்
N variable equation — n மாறிச் சமன்பாடு

O

Oblique axes	— சரிவு அச்சுகள்
Obtuse angle	— விரிகோணம்
Ohm	— ஓம்
One cycle logarithmic scale	— ஒரு சுற்று மடக்கை அளவு கோல்
One mark	— ஒன்றுக்குறி
Open circut	— திறப்புச் சுற்றுவழி
Optics	— ஒளியியல்
Orbit	— சுற்றுப் பாதை
Ordinate	— குத்தாயம்
Orifice	— துளை
Origin	— ஆதி
Oxygen	— ஆக்சிஜன்

P

Pair	— இரட்டை
Parabola	— பரவளையம்
Parabolic nomogram	— பரவளைய நேமவரையம்
Paraffinic hydrocarbon	— பாரஃப்பினிக் ஹைட்ரோ கார்பன்
Parallel	— இணையான
Parallel index lines	— இணைக் குறியிணைப்புக் கோடுகள்
Parallel lines	— இணைகோடுகள்
Parallelogram	— இணைவகம்
Parallel scale conversion chart	— இணையளவுகோல் அளவு மாற்ற விளக்கப்படம்
Parallel scale nomogram	— இணையளவுகோல்நேம வரையம்
Parallel scales	— இணையளவு கோல்கள்
Partial pressure	— பகுதி அழுத்தம்
Percentage	— நூற்று வீதம்
Period	— அலைவு நேரம்
Perpendicular	— செங்குத்தான
Perpendicular axes	— செங்குத்து அச்சுகள்
Perpendicular index lines	— செங்குத்துக் குறியிணைப்புக் கோடுகள்
Photometer	— ஒளியளவி
Physics	— இயற்பியல்

Pitch — புரியிடைத் தூரம்
Pivotal line — இமக்குமையக் கோடு
Pivotal point — இயக்குமையப் புள்ளி
Pivotal scale — இயக்குமைய அளவுகோல்
Plane geometry — தள வடிவியல்
Planet — கோள்
Plotting equation — குறியீட்டுச் சமன்பாடு
Plotting modulus — குறியீட்டுக் குணகம்
Point — புள்ளி
Point at infinity — எட்டாப்புள்ளி
Point of contact — தொடுபுள்ளி
Position — இருப்பிடம்
Positive number — மிகை எண்
Positive root — மிகை மூலம்
Positive value — மிகை மதிப்பு
Pound — பவுண்டு
Power — திறன், படி
Power loss — திறன் இழப்பு
Pressure — அழுத்தம்
Primary scale — முதன்மை அளவுகோல்
Principal — அசல், முதன்மையான
Principle — கோட்பாடு
Product — பெருக்குத் தொகை
Programme — நிகழ்ச்சி நிரல்
Proof — நிறுவல்
Property — பொதுப் பண்பு
Proportional — விகித சமமான
Proportional chart — விகிதசம விளக்கப்படம்
Protractor — கோண அளவி
Prove — நிறுவு
Punch card — துளைசெய்யப்பட்ட அட்டை

Q

Quadratic equation — இருபடிச் சமன்பாடு

R

Radial nomogram — ஆரை நேமவரையம்
Radian measure — ஆரையன் அளவை
Radiation — கதிர் வீசல்

Radius — ஆரம்
Radius of curvature — வளைவு ஆரம்
Radius of gyration — சுழல் ஆரம்
Range — எல்லை வேறுபாடு, நெடுக்கம்
Rate — வீதம்
Ratio — விகிதம்
Real number — மெய் எண்
Real root — மெய் மூலம்
Real value — மெய் மதிப்பு
Reciprocal — தலைகீழ்
Reciprocal scale — தலைகீழ் அளவுகோல்
Rectangle — செவ்வகம்
Recurrent variable — மீண்டும் வரும் மாறி
Reduction factor — உரிச்சுருக்கக் கூறு
Refractive index — ஒளிவிலகல் எண்
Repetition — மறுபகர்ப்பு
Resistance — மின்தடை
Result — முடிவு
Reynold's number — ரெனால்டின் எண்
Right angle — செங்கோணம்
Right angled triangle — செங்கோண முக்கோணம்
Right circular cone — வட்ட நேர்க் கூம்பு
Right index — வலக் குறியீடு
Rigidity moduls — விறைப்புக் குணகம்
Root — படிமூலம், மூலம்
Roughness coefficient — சொரசொரப்புக் கெழு
Row — நிரை
Rubber — ரப்பர்

S

Sag — தொய்வு
Satisfying — நிறைவுசெய்யும்
Saturated aqueous solution — நிறையுற்ற நீரியக் கரைசல்
Scale — அளவுகோல்
Scale equation — அளவுகோல் சமன்பாடு
Scale length — அளவுகோல் நீளம்
Scal modulus — அளவுகோல் குணகம்
Second — நொடி

Second order determinant — இரண்டாம் நிலை அணிக் கோவை
Segment — துண்டு
Semivertical angle — அரை உச்சிக் கோணம்
Set — தொகுதி
Set square — மூலைமட்டக் கருவி
Shaft — இயந்திரத் தண்டு
Shearing stress — சறுக்குப் பெயர்ச்சித் தகைவு
Shell — கூடு
Sign — குறி
Silver nitrate — வெள்ளி நைட்ரேட்டு
Similar triangles — வடிவொத்த முக்கோணங்கள்
Simple pendulum — தனி ஊசல்
Single phase — ஒற்றை நிலை
Size — அளவு
Slide — நழுவி
Slide rule — நழுவு கணிப்பான்
Sliding adjacent scales — நழுவிச் செல்லும் அடுத்துள்ள அளவு கோல்கள்
Slope — சரிவு
Smoke point flame — புகைப் புள்ளிச் சுடர்
Smooth — இழைவான
Smooth curve — இழைவான வளைகோடு
Sodium hydroxide — சோடியம் ஹைட்ராக்சைடு
Softness factor — மென்மைக் கூறு
Solubility — கரைதிறன்
Solute — கரைபொருள்
Solution — கரைசல், தீர்வு
Span — இருமுனை இடைநீளம்
Special sliderule — சிறப்பு நழுவு கணிப்பான்
Specific gravity — அடர்த்தி எண்
Speed — வேகம்
Sphere — கோளம்
Spherical segment — கோளத் துண்டு
Square — இருபடி
Square root — இருபடி மூலம்
Square root scale — இருபடி மூல அளவுகோல்
Square scale — இருபடி அளவுகோல்

Standard form	—	படித்தர அமைப்பு
,, scales	—	படித்தர அளவுகோல்கள்
,, Adjacent scales	—	நிலையான அடுத்துள்ள அளவு கோல்கள்
Stem	—	தண்டு
Straight line	—	நேர்கோடு
Stress	—	தகைவு
Stroke	—	கீறு
Subdivision	—	உட்பிரிவு
Substitute	—	பதிலிடு
Substitution	—	பதிலீடு
Suffix	—	கீழ்க்குறி
Sulphuric acid	—	கந்தக அமிலம்
Sum	—	கூட்டுத் தொகை
Surface area	—	மேற்பரப்பு
Synthetic division method	—	தொகுப்பு வகுத்தல் முறை
Synthetic geometry	—	தொகுமுறை வடிவியல்
Synthetic method	—	தொகுப்பு முறை

T

Table	—	அட்டவணை, பட்டியல்
Tabulate	—	அட்டவணைப்படுத்து
Tangent	—	தொடுகோடு
Tape	—	நாடா
Temperature	—	வெப்பநிலை
Temporary scale	—	தாற்காலிக அளவுகோல்
Tensile strength	—	நீட்சி வலிமை
Terminal voltage	—	முற்று மின்அழுத்தம்
Ternary system	—	முத்தனிம அமைப்பு
Test piece	—	சோதனைத் துண்டு
Theory of equations	—	சமன்பாட்டுக் கொள்கைகள்
Thermal neutron	—	வெப்ப நியூட்ரான்
Thermal value	—	வெப்ப மதிப்பு
Thermometer	—	வெப்ப அளவி
Thickness	—	தடிப்பு
Third order determinant	—	மூன்றும் நிலை அணிக்கோவை

Three cycle logarithmic scale	—	முச்சுற்று மடக்கை அளவு கோல்
Three variable equation	—	மும்மாறிச் சமன்பாடு
Time	—	நேரம்
Time of efflux	—	புறவொழுக்கு நேரம்
Torque	—	இரட்டைத் திருப்புதிறன்
Torsional modulus	—	முறுக்குக் குணகம்
Transpose	—	புறமாற்றம் செய்
Transverse line	—	குறுக்குக் கோடு
Transverse scale	—	குறுக்குக் கோட்டு அளவு கோல்
Trapezium	—	சரிவகம்
Trial and error method	—	சோதனைப் பிழை முறை
Trigonometric equation	—	கோண கணிதச் சமன்பாடு
Trigonometric function	—	கோண கணிதச் சார்பு
Trigonometric tables	—	கோண கணிதப் பட்டியல்கள்
T square	—	T வடிவ வரைகருவி
Two cycle logarithmic scale	—	இருசுற்று மடக்கை அளவு கோல்
Two variable equation	—	இருமாறிச் சமன்பாடு
Type	—	வகை

U

Unequal	—	சம மற்ற
Uniform scale	—	சீர் அளவுகோல்
Unit	—	அலகு
Upper limit	—	மேல் எல்லை

V

Value	—	மதிப்பு
Vapour pressure	—	ஆவி அழுத்தம்
Variable	—	மாறி
Velocity	—	திசைவேகம்
Vertex	—	உச்சி
Vertical axis	—	நிலைக்குத்து அச்சு
Vertical line	—	நிலைக்குத்துக் கோடு
Vibration frequency	—	அதிர்வு அலைவெண்

Vicker's hardness number — விக்கெரின் கெட்டிமை எண்
Viscosity — பிசிப்புமை
Volt — வோல்ட்டு
Voltage regulation — மின்னழுத்தச் சீர்மை
Volume — கன அளவு

W

Water film coefficient — நீர்ப்படலக் கெழு
Watt — வாட்டு
Weight — எடை
Weir — கலிங்கு
Whittakar's form — விட்டாகரின் அமைப்பு
Width — அகலம்
Wing span — இறக்கைமுனை இடைநீளம்
Wire — கம்பி

X

x axis — x அச்சு

Y

y axis — y அச்சு
Young's modulus — யங்கின் குணகம்

Z

z chart — z விளக்கப் படம்
Zero — சுழி
Zero mark — சுழிக் குறி
Zero point — தொடக்கப் புள்ளி
Zinc chloride — துத்தநாகக் குளோரைடு
Zinc sulphate — துத்தநாகச் சல்ஃபேட்